◕ 불가능한 기하학적 작도 : 3대 작도문제

1. 원적 : 주어진원과 동일한 넓이를 갖는 정사각형을 작도하는 문제.

2. 정육면체의 배적 : 주어진 정육면체의 두 배의 부피를 갖는 정육면체의 한 변의 길이를 작도하는 문제.

3. 각의 3등분 : 임의의 각을 3등분하는 선분을 작도하는 문제.

1. 기하학적 작도의 제한 : 유클리드 도구.

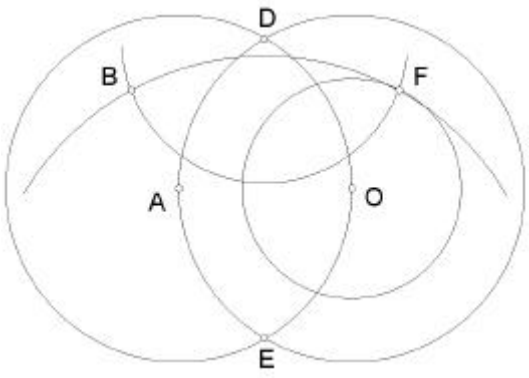
3대 작도문제의 기하학적 작도에서 직선자와 컴파스 만으로 제한.

유클리드 "원론"에서 작도에 관한 공준

공준1. 한 점에서 또 다른 한 점으로 직선을 그릴 수 있다.

공준2. 유한 직선은 무한히 연장시킬 수 있다.

공준3. 임의의 점을 중심으로 하고, 그 중심으로부터 그려진 유한 직선 동일 반경을 갖는 원을 그릴 수 있다.



[작도] 위의 그림 에서 원 A(O) 와 원O(A) 의 교점을 D, E라 하고, 원 D(B)와 원 E(B) 의 교점을 F라 하면 AB=OF이다. 따라서, O(F)=O(AB) 이다.

2. 원적문제 : 구적 불가능한 궁형

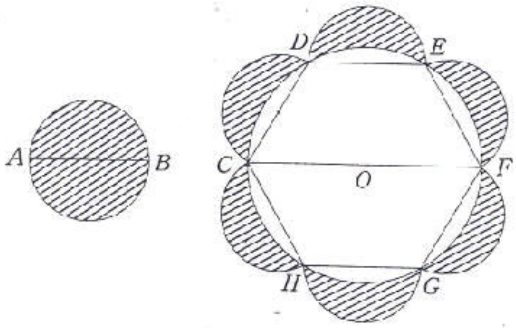
반지름이 1인 원이 있다면 면적은 π 이다. 이원의 면적과 같은 정사각형의 한변의 길이를 x 라하면 $x^2 = \pi$ 가된다.

따라서 원적 문제는 자와 컴퍼스로 제한된 기하학적 작도로 제곱해서 π 가 되는 실수를 도출할 수 있느냐? 하는 문제로 바꿀 수 있다.

[히포크라테스의 원의 구적]

지름이 AB**인 주어진원을 구적하기 위하여 반경** AB**인 원을 그리고, 그 원에 내접하는 정**6**각형** CDEFGH**를 작도하면** CF**는 원의 지름이고,**

CD=DE=EF=FG=HC=AB



정6**각형** CDEFGH**의 면적** + 3×(**주어진 원의 면적**)

=**큰원**(CF)**의 면적** + 6×(**궁형의 면적**)

=4×(**주어진 원의 면적**) + 6×(**궁형의 면적**) **이다.**

따라서.

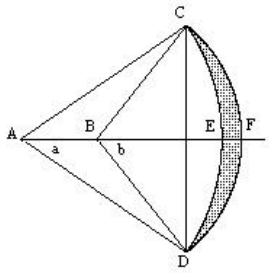
주어진 원의 면적=정육각형 CDEFGH**의 면적** -6×(**궁형의 면적**)

[참고] 히포크라테스의 구적가능한 궁형 5 가지

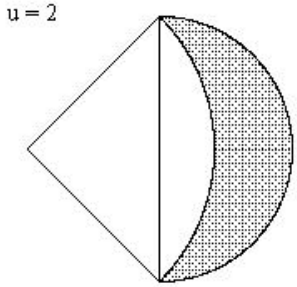
주어진 원의 면적과 같은 사각형을 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있는가 하는 문제는 고대로부터 전해진다. 이것을 원적문제라고 하는데 이것이 불가능하다는것은 이후 19세기에 와서 풀려졌다. 그렇지만 곡선으로 둘러쌓이 도형의 면적과 같은 정사각형의 한변을 작도하는 것은 매우 흥미로운 문제이다. 이 문제와 관련된 문제 중에서 초생달 모양의 도형과 같은 넓이를 가진 정사각형을 작도하는 문제-궁형 구적법이라고 한다-는 고대로부터 있었다. 이러한 문제들도 모두 원적문제를 해결하기 위하여 파생된 문제들이다. 작도가능한 궁형은 모두 5개가 있다는 것이 알려져 있다. 최초의 세 가지는 히포크라테스에 의하여 연구되었고 나머지 두 가지는 18세기에 와서 오일러에 의하여 연구되었다. (여기에 나오는 히포크라테스는 의사가 아니다. 이것을 구별하기 위하여 여기의 히포크라테스는 자신의 출생지 이름을 따서 Chios의 히포크라테스라고 하고 의사 히포크라테스는 Cos의 히포크라테스라고 한다. 이 두 지역은 각각 섬이다.)

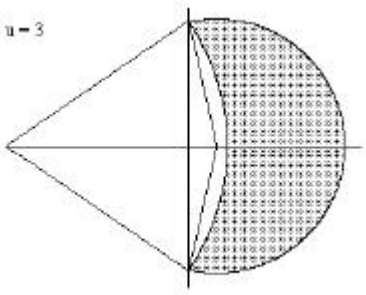
문제는 다음과 같다. 아래그림에서 빗금친 부분의 면적은 AC=R, BC=r을 반지름으로 하는 부채꼴의 면적의 차이다. ∠CAB=a, ∠CBE=b라고 두면

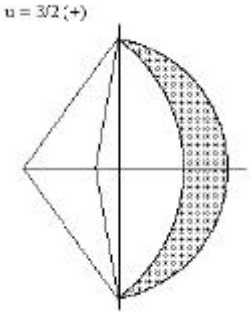
궁형의 면적은 $[R^2\sin(2a)-r^2\sin(2b)]/2$와 같다. 이것이 작도가능하기 위해서는 먼저 근 반지름과 작은 반지름이 모두 작도 가능해야한다. 따라서 적당한 유리수 u가 존재하여 $R^2=ur^2$의 관계가 있어야 한다.



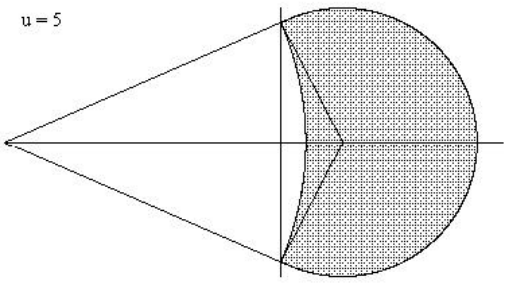
히포크라테스에 의하여 발견된 것은 다음과 같은 세 가지 형이다.

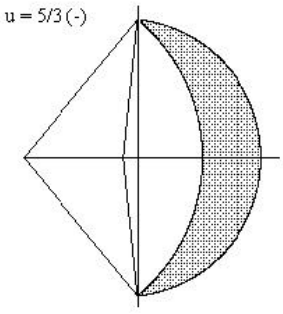






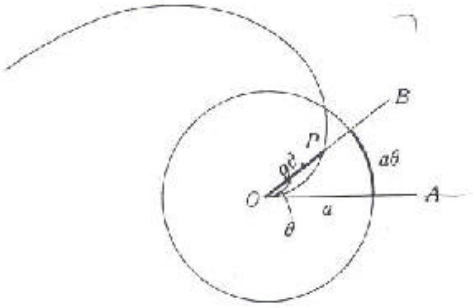
오일러에 의하여 발견된 나머지 두 개는 다음과 같다. 빗금친 도형의 면적이 어떤 다각형의 면적과 같을까?





[아르키메데스의 나선]

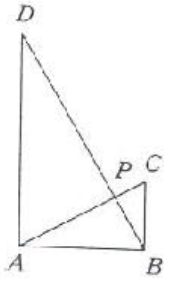
아르키메데스의 나선을 이용하면 원적문제, 즉 반지름이 a 인 과 같은 넓이를 갖는 정4각형을 다음과 같이 작도할 수 있다.

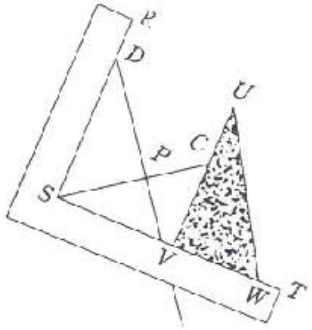


$$K = \{\ a \times 4 \times (OP)/2 = 2a \times (OP)\ \}$$

따라서 구하고자 하는 정사각형의 한 변은 $2a$ 와 OP의 비례중항이다.

3. 배적 문제- 플라톤의 수학관





APB **와** APD **는 닮은꼴이므로**

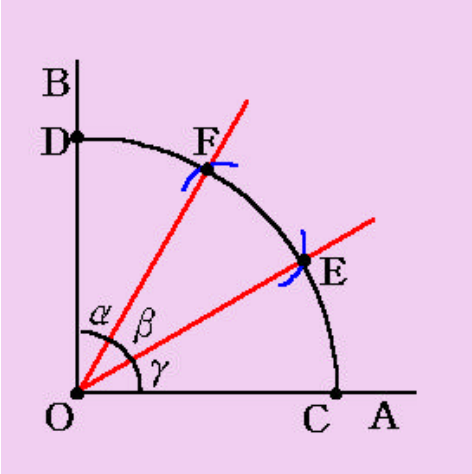
PC : PB = PB : PA = PA : PD 이 성립하여

PD**와** PA**는** PC**와** PD**사이의 두 비례중항이다.**

따라서 PD=2(PC)**가 되는 두 직각삼각형** ABC**와** ABD**를 작도할 수 있다면 문제는 해결된다.**

4 각의 3등분 : 흥미로운 도그 토마호크

1) 각 90^0 의 삼등분



OD=OE=CE=OC=OF=DF

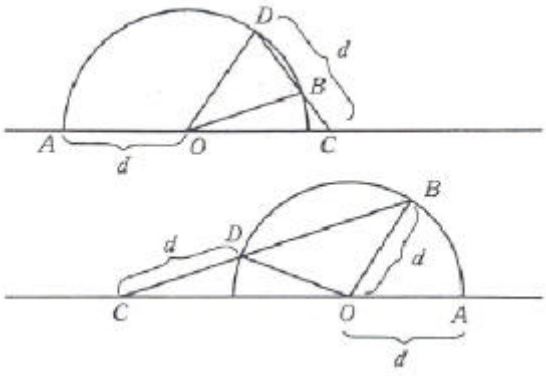
이므로 △OCE 와 △ODF 는 정△ 이다.

∠COF+∠EOF=60° , ∠DOE+∠EOF=60°

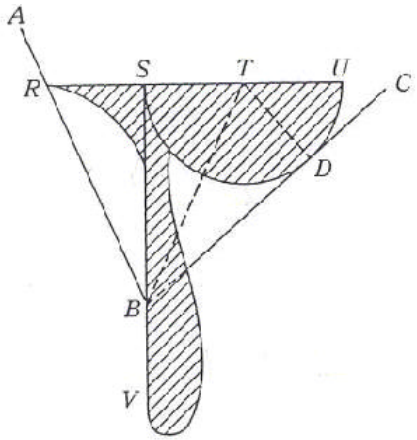
∠COF+∠EOF+∠DOE=90° **이므로**

∠COF =∠EOF=∠DOE=30° **가 되어 삼등분된다.**

2) 아르키메데스의 각의 3등분



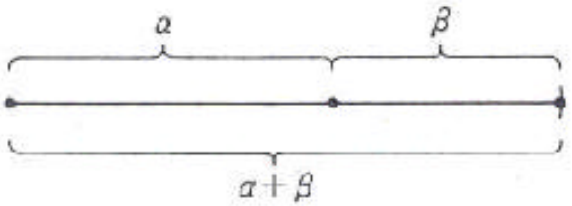
3) 토마호크에 의한 각의 3등분



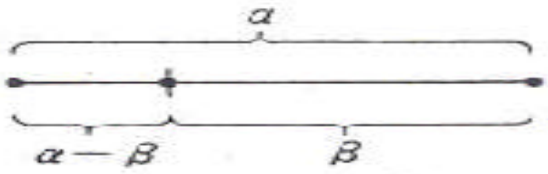
5 문제해결 : 반트젤과 린데만

대수의 영역에서 유클리드의 도구로 다하기, 빼기, 곱하기, 나누기와 제곱근을 구하는 연산이 가능하다는 사실을 알아냈다.

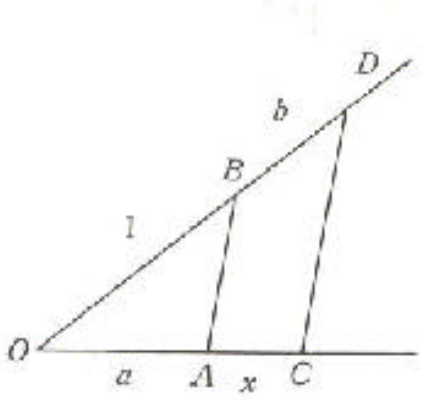
1. 더하기



2. 빼기



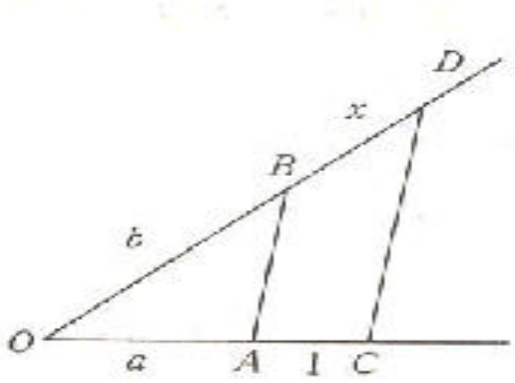
3. **곱하기**



$$(a + x) : (1 + b) = a : 1$$

$$\therefore\ x = ab$$

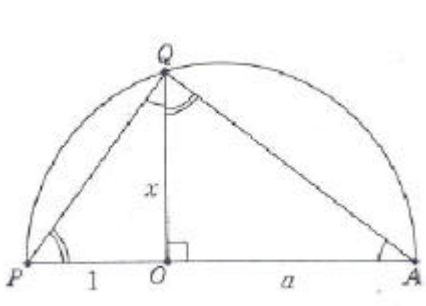
4. **나누기**



$$(a + 1) : (b + x) = a : b$$

$$\therefore\ x = b/a$$

5. **제곱근**



$$a : x = x : 1$$

$$\therefore\ x = \sqrt{a}$$

수론의 영역에서 실수는 서로 베타적인 두 집합 대수적수와 초월수로 나눌 수 있다.

대수적 수 : 정수계수를 다항식 $a_n x^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 의 해가 되는 수

초 월 수 : 대수적 수가 아닌 실수를 말한다.

위의 결과를 이용 반트젤은 1837년 작도 문제 해결에 필요한 다음 작도문제해결에 필요한 정리를 증명하였다.

정리 1 주어진 단위 길이로부터 유클리드 도그를 써서 작도 가능한 임의의 길이의 크기는 대수적 수이다.
(대수적인 수란, 유리수를 계수로 하는 방정식
$a_n x^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ 은 유리수)")

정리2 주어진 단위길이로부터 유클리드 도구를 써서 유리계수를 가지지만 유리근을 갖지 않는 3차방정식의 근을 크기로 하는 선분은 작도 할 수 없다.
(유리계수 3차 방정식의 해가 작도가능하면, 이 3차 방정식은 유리수 범위에서 인수분해된다. 다시 말해, 이 3차방정식은 적어도 한 개의 유리수근을 갖는다.)

그리스가 매우 번영했던 기원전 450년경, 정치와 문화의 중심지었던 아테네의 시민들은 생활을 위한 노동을 노예에게 맡기고, 자신들은 정치와 학문에만 열중하였다. 이런 분위기에서 교양을 쌓으려는 시민들의 수효가 많아지자 소피스트(sophist)라고 불리는 직업적인 가정교사가 나타났다. 소피스트들은 위의 세가지 작도 문제를 열심히 연구하였지만, (눈금이 없는) 자와 (쓰고 나면 다시 접히는 컴퍼스) 컴파스만 가지고는 이 문제들을 해결할 수가 없었다. 그래서, 이 세 문제가 3대 난문(三大難問)이라고 일컬어지고 있다. 이 문제들이 실제로 불가능함을 증명한 것은 19세기에 이르러서이다

1. 원적문제의 해결

원적문제에서 반지름이 1인 원이 주어졌다면, 이 원의 넓이 π와 같은 넓이를 가진 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{\pi}$ 이므로 $\sqrt{\pi}$를 작도할 수 있느냐 하는 문제가 된다. 1882년에 뮌헨 대학교수 린데만이 π가 초월함수, 따라서 $\sqrt{\pi}$ 도 초월함수라는 것을 증명함으로서, 작도불가능함을 보였다.(따라서, $\sqrt{\pi}$도

작도불가능하게 되는 것이다.)

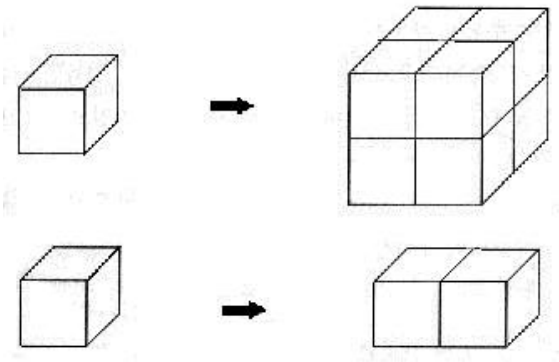
2. 배적문제의 해결

한변의 길이가 1인 정육면체가 주어졌다고 하자. 이 때, 주어진 정육면체의 부피의 2배의 부피를 갖는 정육면체의 부피는 2이므로 $x^3=2$를 만족하는 실수 $x=\sqrt[3]{2}$가 우리가 구하고자 하는 정육면체의 한 변의 길이다. $x^3=2$가 유리수의 범위에서 인수분해가 되지 않기 때문에, $\sqrt[3]{2}$는 자와 컴퍼스만으로는 작도불가능하다.

[참고]

위의 작도문제는 다음과 같은 전설이 있다고 한다.
옛날에 델로스(Delos)섬에 전염병이 돌았는데, 이것을 신의 노여움이라고 생각한 주민들은 아폴로 신전에 가서 많은 공물을 바치고 기도를 올리며 병마를 쫓아줄 것을 빌었다. 그랬더니, 아폴로 신의 계시가 전달되었는데 다음과 같다.

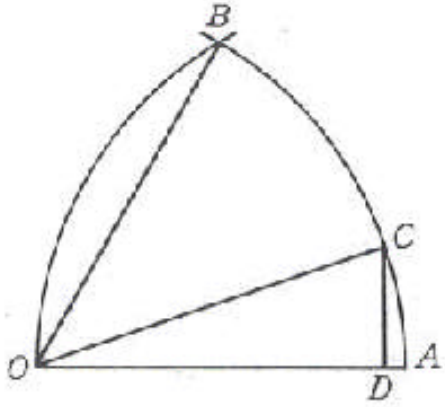
"지금 신전에 정육면제 모양의 제단이 있다. 이 제단의 2배의 부피를 갖는 정육면체 모양의 새 재단을 만들어라. 그리하면, 전염병이 물러가리라."



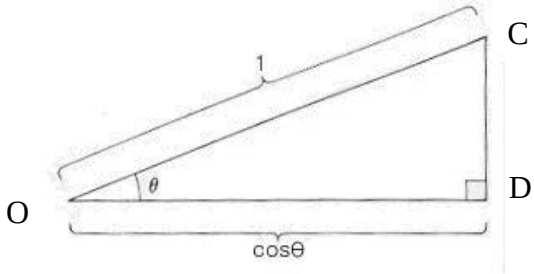
그래서, 델로스 사람들이 위와 같은 모양들로 제단을 만들었으나, 전염병이 계속 돌았고, 이리하여 이 문제를 본격적으로 연구했다는 이야기가 전해진다.

3. 각의 3등분의 해결

특수각 60^0 **를 3등분 할 수 없음을 보이자.**



한가지 각 $\angle$**BOA=** 60^0 **가 작도가능하면, cos** 60^0**도 작도가능이고, 역도 성립함을 이용하자.(아래그림참조)**



$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$**이므로, 여기서,** $\cos\theta = x$**라 놓으면,**

$4x^3 - 3x = \cos 3\theta$

$1/2 = \cos 60^0$ **=cos3(**20^0**)** $= 4\cos^3 20^0 - 3\cos 20^0 = 4x^3 - 3x$

그런데, 이것이 유리수의 범위에서 인수분해되는 것은 특별한 경우($3\theta = 90°$**)뿐이다. 반례로** $3\theta = 60°$**일 때, 방정식은** $4x^3 - 3x = 1/2$ **이 되는데, 이 식은 유리수 범위에서 인수분해가 되지 않는다. 따라서,** $\cos 20^0 = x$**는 유리계수 방정식의 근이 될 수 없으므로,** $\cos 60°$**는 작도불가능하고 각** $60°$**도 마찬가지로 유클리드 도구를 써서 작도 불가능하다.**

◔ 기하학적 작도의 사고전환

1 컴퍼스만으로 작도 : 마스케로니아

아들러(August)가 역변환을 이용하여 마스케로니아의 결과를 새롭게 증명.

유클리드 작도에서는 주어진 점들로부터 새로운 점들은

① 두원의 교점

② 직선과 원의 교점

③ 두 직선의 교점

마스케로니의 작도 정리

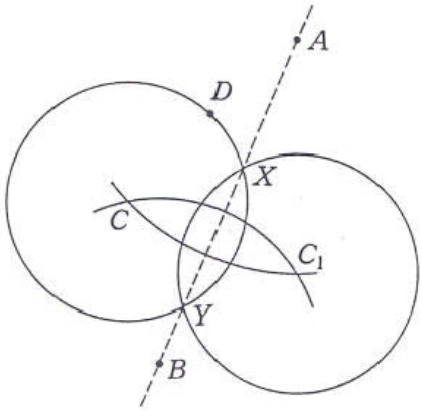
주어진 원소와 구하는 원소가 모두 점인 임의의 유클리드의 작도는 유클리드 컴퍼스만으로 수행 될 수 있다.

위 의② 와 ③ 에대한 증명

② 컴퍼스로 원C(D) 와 두점 A, B를 지나는 직선의 교점을 작도하기.

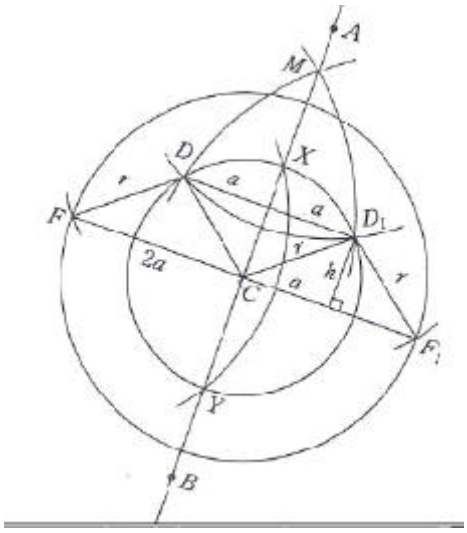
경우ⅰ) C가 AB 위에 있지 않을 때.(아래그림 참조)

A(C), B(C)	C(D) ,C 1(CD)
C 1	X, Y



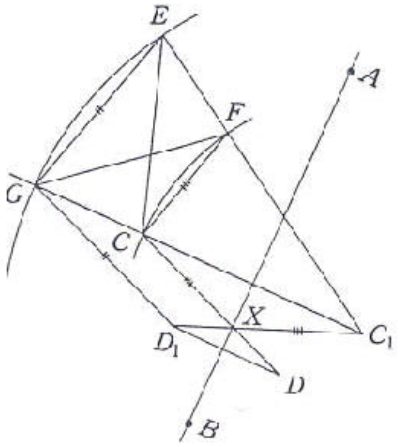
경우ⅱ) C가 AB위에 있을 때,(아래 그림6-2참조)

$A(D)$, $C(D)$	$C(DD_1)$, $D(C)$	$C(DD_1)$, $D_1(C)$	$F(D_1)$, $F_1(D)$	$F(CM)$, $C(D)$
D_1	F	F_1	M	X, Y



③ 컴퍼스로 두점 A, B를 지나는 직선과 두점 C, D를 지나는 직선의 교점을 작도하기(그림6-3참조)

$A(C)$, $B(C)$	$A(D)$, $B(D)$	$C(DD_1)$, $D_1(CD)$	$C_1(G)$, $G(D_1)$	$C_1(C)$, $G(CE)$	$C(F)$, $C_1(CF)$
C_1	D_1	G	E	F	X



2 직선자의 작도 : 퐁슬레와 슈타이너.

퐁슬레

퐁슬레는 1788년 메츠에서 태어나서 그 곳의 리세(프랑스의 대학 예비교)에 다닌 후 1807년부터 1810년까지 에콜 폴리테크니크에 등록하여 몽주 밑에서 공부하였다. 메츠 사관학교에서 학생으로 정식 교육을 마친 후 1812년 공병 중위로 군에 입대하여 나폴레옹의 치명적인 러시아 원정에 종군하였다. 퐁슬레는 모스크바에서 프랑스로 후퇴할 때 클랄스노 전투에서 중상을 입고 버려진 채 포로로 붙잡혀 거의 5개월이나 끌려다니다가 볼가 강 근처의 사라토프의 감옥에 투옥되었다.

그 곳에서 아무 책도 없이 위대한 <도형의 사영적 성질에 관하여, Traite des proprietes projectives des figures>를 계획하였는데, 그 후 석방되어 1814년 후반 메츠로 돌아와 그것을 편집하여 1822년 파리에서 발행하였다. 퐁슬레는 만년을 띄엄띄엄 역학, 수리학, 무한급수, 기하학에 관한 저술을 하면서 군대에 전념하였다. 그는 응용역학에 관한 논문(1826), 물레방앗간에 관한 재미있는 연구 보고서(역시 1826),1851년의 런던 세계박람회에 전시된 영국 기계와 공구의 보고서, 1822년(1862,1865)의 초기 논문을 두 권 분량으로 확장한 것, 크렐레의 저널에 실린 수많은 기하학 기사를 발표했다. 오랜 생애 동안에 건강이 나빴음에도 불구하고 퐁슬레는 군임무에서 항상 성실하고 유능하였으며 죽을 때까지도 수학적 창조 능력을 가지고 있었다. 그는 79세의 일기로 1867년 파리에서 죽었다.

퐁슬레의 <도형의 사영적 성질에 관하여>는 기하학적 이정표이다. 그것은 사영기하학 연구에 커다란 자극을 주었고 이 분야 역사에 있어서 이른바 '위대한 시기'를 열었다.

슈타이너

사영기하학에서의 퐁슬레의 착상은, 세계적으로 알려진 가장 위대한 종합기하학자 중의 한 사람인, 스위자 기하학자 슈타이너가 보다 높은 수준으로 발전시켰다. 슈타이너는 1796년 우첸스드르프에서 태어났고, 14세가 되도록 교육을 받지 못해서 글자 하나 제대로 쓰지 못했다. 17세 때 그는 유명한 스위스 교육자 페스탈로치(Johann Heinrich Pestalozzi, 1746-1827)제자가 되었는데, 이때부터 수학에 대한 흥미를 갖게 되었다. 그 후 1818년에 슈타이너는 하이델베르크 대학에 입학하여 수학적 재능을 발휘하였다. 1821년 베를린으로 가서 가정교사를 시작하고 곧이어 공업학교의 교사가 되었다. 그의 이름은 새로 설립된 크렐레 저널에 투고한 논문을 통하여 잘 알려지게 되었으며 그와 아벨이 그 잡지의 전도적인

기고자였다.
1834년 야코비, 크렐레, 훔볼트의 추천으로 베를린 대락의 교수기되어 나머지 교직 생활을 그 곳에서 하였다. 건강이 나빠서 말년을 스위스에서 보내고 1863년 베른에 죽었다.
"아폴로니우스 시대 이래 가장 위대한 기하학자"로 묘사되는 슈타이너는 기하학의 종합적 논법에 엄청난 능력을 가지고 있었다. 그는 그 분야에 많은 기여를 하였고, 최고 수준의 수많은 논문을 썼다. 그는 기하학의 해석적 방법을 기하학적으로 의지가 약한 사람들의 목발로 여기며 매우 싫어했다고 한다. 종종 증명을 적을 시간도 없을 만큼 막대한 속도로 새로운 기하학을 창조하였는데, 그 결과 그의 많은 발견이 수년 동안 증명을 찾는 사람들에게 수수께끼로 남았다. 그의 <체계적 발전, Systematische Entwickelunger>이 1832년에 발간되자 곧바로 명성을 떨쳤다. 이 책에는 왕복운동의 완벽한 논의, 쌍대의 원리, 상사변환의 치역과 속선형, 조화분할, 다른 꼭지점을 가지는 두 호모그래프적 속선형에 대응하는 직선의 교점의 자취로서 원뿔곡선을 매우 효과적으로 정의한 정의에 기초한 원뿔곡선의 사영기하학이 실려 있다. 그는 공간에서의 n각형의 연구, 곡선과 곡면론, 수족, 곡선, 윤전곡선, 3차곡면상의 27개의 직선에 공헌했다. 그는 다른 사람들이 연구하던 변분법의 여러가지 지식이 요구되는 극대·극소에 관한 문제를 종합기하학을 써서 공략했다. 그의 이름은 말파티 문제의 슈타이너 해와 일반화, 슈타이너 체인, 슈타이너의 계, 신비한 육선형 성단의 슈타이너 점에서 같은 기하학의 많은 부분에서 마주친다.

약 980년경 아라비아 수학자 아부를-웨파는 벌림이 고정된 컴퍼스와 직선자로 수행하는 작도를 생각해냈다.

1822년 프랑스 수학자 퐁슬레는
작도 평면에 한 원과 그 중심이 주어지면 모든 유클리드 작도는 직선자 하남만으로 수행 될 수 있다. 는 작도정리 발표.

1833년 스위스계 독일인 기하학의 천재 슈타이너는 퐁슬레의 작도정리를 체계적으로 다루어 발전시켰다. 특히 원은 중심과 반경에 의해 결정되므로 단지

원을 중심과 원주상의 한 점.

으로 간주 직선자만을 가지고 주어진 점들로부터

① 두 원의 교점

② 직선과 원의 교점, 을 작도함을 보였다.

이탈리아 세베리는 퐁슬레-슈타이너 작도정리를 훨씬 더 발전시켜

모든 유클리드 작도는 직선자만으로 완성하기 위해서는 원의 중심과 그 원의 아주 작은 호의 일부만 가능하다..
는 사실을 보였다..