제 10장. 사영기하학의 재발견

10-1. 화법기하학 : 몽주

1. 몽주(Gaspard Monge. 1746-1818)

- 프랑스 본(Beaunne) 태생
- 16세에 측량기계 만들어 본의 대규모 지도 정교하게 만듦.
- 주어진 자료로부터 요새에 설치된 표의 위치를 찾는데 3차원 문제를 2차원 평면에 사영하여 해결함(군사기밀로 지켜짐).⇒화법기하학의 시작.
- <화법기하학>,<해석학의 기하학에의 응용>-'미분기하학의 아버지'

2. 화법기하학이란?

- 3차원 공간의 입체를 정확하게 2차원 공간인 평면에 표현하는 것.

가. 평면도 : 도형을 투영했을 때 수평면 위에 나타난 결과

나. 입면도 : 도형을 투영했을 때 수직면 위에 나타난 결과

10-2. 평면과 공간의 새로운 확장 : 사영평면과 공간

1. 사영기하학

- 사영에 의해 변하지 않는 성질을 연구하는 분야.

가. 사영

한 점 P와 P를 지나지 않는 직선 l위의 몇 개의 점을 연결하여 몇 개의 직선을 긋는 것.

나. 절단

한 직선 l과 l위에 있지 않은 한 점 P에 대하여, P위의 몇 개의 직선과 만나게 하여 L위에 몇 개의 점을 얻는 것.

다. P를 Q에 사영한다

주어진 평면 위에 있는 도형에 대하여, 그 평면 위에 있지 않은 한 점 O와 도형 위의 점 P를 지나는 직선이 다른 평면과 만나는 점 Q가 있을 때 P를 Q에 대응시키는 것. 이 때, O는 사영의 중심이라고 함.

라. 무한원점(a point at infinity)

사영중심 O에 대하여 평면 β위에 평면 α위의 점 P의 대응점이 없는 경우, 평면 α위의 점 P는 평면 β에서 무한히 멀리 있는 점(이상점-ideal point)으로 사영되는 것으로 간주하여 그 점을 평면 β의 무한원점이라고 한다.

마. 무한원직선(the line at infinity)

사영중심 O에 대하여 평면 β위에 대응점을 갖지 않는 평면 α위의 점들의 모임인 직선 AB에 대해서, 직선 AB의 각 점은 평면 β위에서 무한원점으로 하나씩

대응하고 무한원점 전체가 모여서 하나의 이상직선을 이루는데 이 직선을 β의 무한원직선이라고 한다.

바. 사영평면 : 유클리드평면 $\cup$ 무한원직선

사. 사영공간 : 유클리드공간 $\cup$ 무한원평면(무한원직선으로 이루어진 평면)

2. 아핀평면(affine plane)

A_1. 임의의 서로 다른 두 점 위에는 유일한 직선이 있다.

A_2. 임의의 직선 L과 그 위에 있지 않은 한 점 P가 주어져 있을 때, 점 P를 지나서 직선 L에 평행한 직선은 하나 있고, 그 직선은 유일하다.

A_3. 임의의 직선 위에는 적어도 두 점이 존재한다.

A_4. 임의의 직선에 대하여, 그 직선 위에 있지 않은 점이 적어도 하나 존재한다.

A_5. 적어도 하나의 직선이 존재한다.

예) 완비 네-점형모형 : 최소 아핀 평면

공리계 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$와 다음 $\{①, ②, ③\}$은 동치이다.

① 임의의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 하나 있고, 그 직선은 유일하다.

② 임의의 직선 L과 그 위에 있지 않은 한 점 P가 주어져 있을 때, 점 P를 지나서 직선 L에 평행한 직선은 하나 있고, 그 직선은 유일하다.

③ 동일직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점이 존재한다.

예) 유클리드 평면은 아핀 평면이다.

3. 사영평면(projective plane)

P_1. 임의의 서로 다른 두 점 위에는 유일한 직선이 있다.

P_2. 임의의 서로 다른 두 직선 위에는 유일한 점이 있다.

P_3. 임의의 한 직선 위에는 적어도 서로 다른 세 점이 존재한다.

P_4. 임의의 한 직선에 대하여 그 직선 위에 있지 않은 점이 적어도 하나는 존재한다.

P_5. 적어도 하나의 직선이 존재한다.

예) 파노모형 : 최소 사영 평면

공리계 $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$와 다음 $\{a, b, c\}$는 동치이다.

a. 임의의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 하나 있고, 그 직선은 유일하다.

b. 임의의 서로 다른 두 직선은 한 점에서 만나고, 그 점은 유일하다.

c. 임의로 택한 세 점이 동일직선 위에 있지 않은 네 점이 존재한다.

4. 사영공간(projective space)

S_1. 임의의 서로 다른 두 점 위에는 유일한 직선이 있다.

S_2. 임의의 서로 다른 두 평면 위에는 유일한 직선이 있다.

S_3. 임의의 한 점과 그 점 위에 있지 않는 직선 위에는 유일한 평면이 존재한다.

S_4. 임의의 한 평면과 그 평면 위에 있지 않은 직선 위에는 유일한 점이 존재한다.

S_5. 임의의 한 직선 위에는 적어도 서로 다른 세 평면이 존재한다.

S_6. 임의의 한 직선 위에는 적어도 서로 다른 세 점이 존재한다.

S_7. 임의의 한 점이 한 직선 위에 있고, 그 직선이 한 평면 위에 있으면, 그 점도 그 평면 위에 있다.

S_8. 점은 어떤 직선 위에 있지 않고, 그 직선은 어떤 평면 위에 있지 않은 관계를 만족하는 점, 직선, 평면이 존재한다.

10-3. 해석기하학과 사영기하학의 만남 : 제차좌표

1. 제차좌표

가. 점 (x,y)에 관한 제차좌표(homogeneous coordinates)

① $(x,y)\in R^2$ 에 대하여

$x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$ $(x_3\neq 0)$을 만족하는 $[x_1,x_2,x_3]$를 점 (x,y)에 관한 제차좌표라고 한다.

② $[x_1,x_2,x_3]$와 $[kx_1,kx_2,kx_3]$는 같은 점에 대한 제차좌표이다.

예) $(-1,-2)$에 대한 제차좌표 : $[-1,-2,1]$, $[2,4,-2]$, $[\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}]$

③ 클라인(1925)은 (x,y)에 관한 제차좌표는 원점과 평면 x_3위의 점 $(x,y,1)$을 연결하는 선분 위에서 원점을 제외한 점들의 좌표라고 함,

나. 직선 $ax+by+c=0$에 관한 제차좌표

$<a,b,c>=<ka,kb,kc>$

다. 유클리드 직선들의 이상점들의 좌표 : $[x_1,x_2,0]$

이상직선 : $<0,0,1>$

2. 유클리드 평면의 확장평면은 사영평면이다.

10-4 연속의 원리와 쌍대의 원리 : 퐁슬레

1. 연속의 원리

직선 L과 L위에 있지 않은 한점 A가 주어졌을 때 A를 지나는 직선 p를 A를 중심

으로 회전시키면 L과 p의 교점 P는 L위를 움직인다. 이 때 회전은 연속적으로 이루어지는데 점 P는 p가 L에 평행이 되는 순간 사라지고 연속성은 깨진다. 이런 연속성이 깨지는 것을 막기 위해서 퐁슬레는 무한원점을 도입하였다.

2. 쌍대의 원리

가. 명제 S의 쌍대란?

①평면 사영기하학 : 명제 S의 용어 중 점을 직선으로, 직선을 점으로 바꾸어놓은 명제 S^d

②공간 사영기하학 : 명제 S의 용어 중 점을 평면으로, 평면을 점으로 바꾸어놓은 명제 S^d

자기쌍대요소 - 직선 : 직선은 다른 용어로 바꾸지 않는다.

나. 평면 사영기하학의 공리 $P_1 \quad P_5$**의 쌍대**

$P_1{}^d$**. 임의의 서로 다른 두 직선 위에는 유일한 점이 있다.**

$P_2{}^d$**. 임의의 서로 다른 두 점 위에는 유일한 직선이 있다.**

$P_3{}^d$**. 임의의 한 점 위에는 적어도 서로 다른 세 직선이 존재한다.**

$P_4{}^d$**. 임의의 한 점에 대하여 그 점 위에 있지 않은 직선이 적어도 하나는 존재한다.**

$P_5{}^d$**. 적어도 하나의 점이 존재한다.**

다. 쌍대의 원리

사영기하학에서는 점, 직선, 평면 사이의 관계를 나타내는 하나의 명제가 주어졌을 때, 이 명제로부터 쌍대인 명제를 만들 수 있고, 또한 주어진 명제가 사영기하학에서 성립하면 새로이 얻어진 쌍대 명제는 자동적으로 성립한다.

예)

파스칼의 정리	**브리앙숑의 정리 (파스칼의 정리의 쌍대)**
6각형의 여섯 개의 꼭지점이 한 원추곡선 위에 있기 위한 필요충분조건은 세 쌍의 대변의 교점이 한 직선 위에 있는 것이다.	6각형의 여섯 개의 변이 한 원추곡선에 접하기 위한 필요충분조건은 세 쌍의 마주보는 꼭지점을 이은 직선들이 한 점에서 만나는 것이다.

<참고> 아핀기하학에서는 쌍대의 원리가 성립하지 않는다.

(∵) A_1**. 임의의 서로 다른 두 점 위에는 유일한 직선이 있다. 의 쌍대 명제는**

$A_1{}^d$. 임의의 서로 다른 두 직선 위에는 유일한 점이 있다. 인데

$A_1{}^d$ 는 평행선은 존재하지 않는다라는 말이 되므로 A_2에 모순이다.

제 11장. 탄생을 위한 전주곡 : 평행공준

11- 1. 평행공준의 역사

1. 공준 5(평행공준)

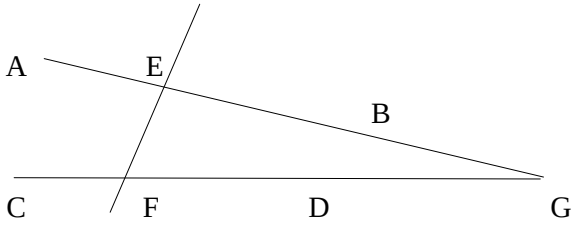
한 직선이 두 직선과 만나서 어느 한 쪽의 두 내각의 합이 두 직각보다 작으면, 이 두 직선을 무한히 연장할 때 두 직각보다 작은 각이 이루어지는 쪽에서 두 직선은 반드시 만난다.

2. 명제 28까지는 평행공준 없이 증명이 가능하지만 명제 29부터는 평행공준을 사용해야 증명이 가능하다.

가. 명제 27

한 직선이 두 직선과 만나서 이루는 엇각이 서로 같으면, 이 두 직선은 서로 평행하다.

(증명) 한 직선이 두 직선 AB , CD와 만나서 이루는 엇각 $\angle BEF = \angle CFE$라고 하자. 직선 AB , CD가 평행이 아니라면 두 직선의 연장선상의 점 G에서 만나고 $\angle CFE$ 는 $\triangle EFG$의 외각이므로 명제 16에 의해서 $\angle CFE > \angle FEG$이다.
이것은 $\angle BEF = \angle CFE$에 모순이다. 따라서 직선 AB , CD는 평행이다.



나. 명제 29

한 직선이 두 평행선과 만나서 이루는 엇각은 서로 같고, 동위각은 서로 같으며, 또 동방 내각의 합은 두 직각과 같다.

(증명)

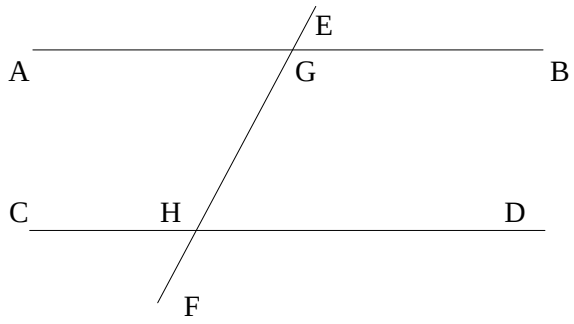
i) $\angle AGH = \angle GHD$

($\because$) $\angle AGH > \angle GHD$ 라고 하면 2직각$= \angle AGH + \angle BGH > \angle GHD + \angle BGH$ 이므로 평행공준에 의해서 직선 AB 와 CD는 만난다. 이것은 두 직선이 평행하다는 가정에 모순이다. 마찬가지 방법으로 $\angle AGH < \angle GHD$라고 하면 모순에

이른다.

ii) $\angle EGB = \angle AGH = \angle GHD$

iii) $\angle BGH + \angle GHD = \angle BGH + \angle AGH =$ 2직각



3. 평행공준에 대한 의심

○ 평행선의 정의를 유한적인 내용과 긍정적인 형태로 바꿔야 하지 않을까?

○ 아홉 개의 공리와 공준으로부터 평행공준을 증명하여 하나의 정리로 이끌어낼 수 없을까?

○ 평행공준을 간결하고 자명한 말로 대체할 수 없을까?

11-2 예측하지 못한 오류

1. 아홉 개의 공리와 공준, 28개의 명제를 이용한 평행공준 증명의 시도

가. 프톨레마이오스(Claudius Ptolemy 85-165)

나. 프로클로스(Proclus, 410-485) - p.249 참고

다. 윌리스(John Wallis, 1616-1703)

윌리스의 공리

임의의 $\triangle ABC$와 임의의 선분 DE에 대하여, 한 변이 DE이고 $\triangle ABC$와 닮은 삼각형 $\triangle DEF$가 존재한다.

☞윌리스의 공리는 평행공준과 동치이다.

라. 사케리(Saccheri. G. 1667-1733)

① 28개 명제 받아들임

② 사케리 사변형 : 각 A와 각 B가 직각이고 변 AC와 BD의 길이가 같은 사변형 $ABCD$

③ 예각가설($\angle C = \angle D <$직각), 직각가설($\angle C = \angle D =$ 직각), 둔각가설 ($\angle C = \angle D >$직각)을 생각하고 예각가설, 둔각가설이 모순이라는 것을 보여 직각가설만이 성립한다는 것을 보임으로써 평행공준을 증명하려고 했다.

④ 증명과정에서 얻어진 사실

	예각가설	직각가설	둔각가설
삼각형 내각의 합	2직각보다 작다.	2직각이다.	2직각보다 크다.
주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나 그 직선과 만나지 않는 직선	무수히 많이 존재한다.	단 하나만 존재한다.	하나도 존재하지 않는다.
주어진 직선의 각 점에서 일정한 길이의 수선을 그을 때 그 끝점의 자취	아래로 볼록한 곡선이다.	직선이다.	위로 볼록한 곡선이다.

마. 람베르트(Lambert. J. H. 1728-1777)

① 세 개의 직각을 갖는 사각형을 기본도형으로 택하여 네 번째 각이 예각, 직각, 둔각이 되는 가설을 생각함.

② 증명과정에서 얻어진 사실

	예각가설	둔각가설
삼각형의 면적	2직각에서 주어진 삼각형의 내각의 합을 뺀 것에 비례한다.	주어진 삼각형의 내각의 합에서 2직각을 뺀 것에 비례한다.

바. 르장드르(Legendre. A. M. 1752-1853)

<기하학 원론>을 통해 29년 동안 평행공준의 다양한 증명을 시도함.

사. 볼리아이(Wolfgang Bolyai. 1775-1856)

11-3. 플레이페어의 공준

1. 펜의 공준

평면상에서 만나는 직선이 있을 때, 이것과 동시에 평행인 직선은 없다.

2. 플레이페어의 공준

주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나서 주어진 직선에 평행한 직선을 꼭 하나만 그을 수 있다.

3. 플레이페어의 공준⇔평행공준

(증명)

i) 플레이페어의 공준⇒평행공준

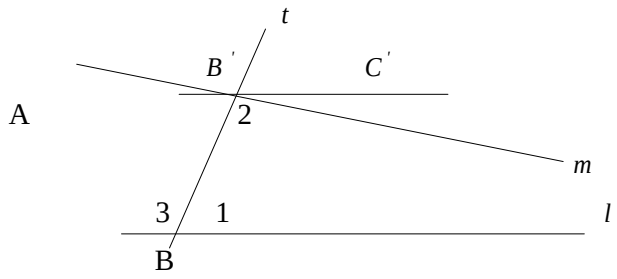
한 직선 t가 두 직선 m, l과 만나서 이루는 두 내각의 합 $\angle 1 + \angle 2 < 180°$ 이라고 하자. $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ 이므로 $\angle 2 < 180° - \angle 1 = \angle 3$

명제23에 의해서 $\angle 3 = \angle C'B'B$를 만족하는 직선 $B'C'$존재하고 명제 27에 의해

서 직선 $B'C'$은 l과 평행하다. 플레이페어의 공준에서 평행선은 유일하게 존재하므로 직선 $B'C'$와 m은 다른 직선이고 m은 l과 만난다.

m과 l이 A에서 만난다고 가정하면 $\angle 2$는 $\triangle AB B'$의 외각이다. 명제 16에 의해서 $\angle 2 > \angle 3$이 되는데 이는 $\angle 2 < \angle 3$에 모순이다.

따라서 m이 t에 관하여 C'와 같은 쪽에서 l과 만난다.



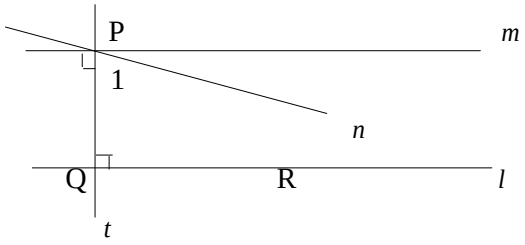
ii) 플레이페어의 공준 ⇐평행공준

P가 주어진 직선 l위에 있지 않은 한 점이라면, 명제 12에 의해서 P를 지나고 l에 수직인 직선 t가 존재한다. 명제 11에 의해서 P를 지나고 직선 t에 수직인 직선 m이 존재한다. 그러면 명제 27에 의해서 l은 m에 평행하다.

n이 P를 지나는 m과 다른 직선이라면 $\angle 1$은 예각이므로

$\angle 1 + \angle PQR < 90° + 90° = 180°$

평행공준에 의해서 n과 l은 만난다. 따라서 평행선은 m하나 뿐이다.



<참고>

명제 11. 주어진 직선 위에 주어진 한 점을 지나고 이 직선과 직각을 이루는 한 직선을 긋는 일.

명제12. 주어진 무한 직선에 대하여 직선 위에 없는 주어진 한 점으로부터 수직인 직선을 긋는 일.

명제13. 한 직선이 한 직선과 만나서 각을 이룰 때, 그 직선은 두 개의 직각을 만들거나, 두 각의 합이 두 직각과 같은 접각을 만든다.

명제16. 임의의 삼각형에서, 하나의 변을 연장하면 외각은 내각 및 내대각의 어느

한 쪽보다 크다.

명제23. 주어진 직선 위의 한 점에서 그 점을 꼭지점으로 하고 주어진 각과 같은 각을 작도하기.