제 1 장 기하학이란 무엇인가

기하학이라는 단어 geometry는 그리스어의 geometrein(geo : 땅, metrein : 측정하다)으로부터 유래된 것이다. 기하학은 실용적인 목적을 초월하여 도형에 대하여 논증기하학을 도입한 시기는 고대 그리스 시대로 거슬러 올라가는데, 밀레투스의 탈레스(thales of miletus)는 삼각형과 원에 관한 몇 가지 성질을 알고 있었으며, 간접적인 측량에서 이러한 성질을 이용했다고 한다. 또한 피타고라스는 증명이라는 방법으로 이런 지식을 논리적으로 체계화하는 착상이 있었던 것으로 전해진다. 유클리드의 <원론>은 대부분 평면과 공간에서 도형에 관하여 다루고 있으며, 또한 수론적인 면을 기하학적 용어로 나타내고 있다.

기하학은 17세기와 18세기에 해석학의 발전과 더불어 대수학 및 해석학과 동등해졌다. 기하학적 도형은 해석기하학(analytic geometry)방법인 좌표를 이용하여 대수학적 또는 해석학적으로 다룰 수 있으며, 역으로 대수학적 또는 해석학적인 면은 기하학적으로 표현될 수 있다.
17세기에 데카르트의 착상은 해석기하학의 기초가 되었다. 특히 18세기 들어서 오일러가 2차 곡선에 대한 완전한 대수적 이론을 확립하여 해석기하학은 상당한 발전을 하게 되었는데 그전에 이 곡선은 아폴로니우스에 의해서 원추곡선으로 연구되었었다. 18세기 말경에 해석학은 기하학에 다시 응용되어 미분기하학(differential geometry)을 탄생시켰다.
19세기에 유클리드 기하학은 선험적(priori) 정당성을 거부한 볼리아이와 로바체프스키는 비유클리드 기하학(non-euclidean geometry)을 발표했으며, 클라인, 푸앵카레, 벨트라미 등은 이 기하학의 논리적 무모순성을 유클리드 기하학과 사영기하학을 바탕으로 만든 모형을 이용하여 입증하였다. 해석기하학에서 눈에 보이는 평면과 공간은 우리가 잘 알고 있는 2차원 유클리드 공간 E^2와 3차원 유클리드 공간 E^3로 나타낼 수 있다. 여기서 E^2와 E^3의 기하학을 각각 평면기하학(plane geometry)과 입체기하학(solid geometry)이라 부르고, E^n의 기하학을 n차원 유클리드 기하학 (n-dimensional euclidean geometry)이라 부른다.

1854년에 리만은 괴팅겐 대학 취임 강연에서 <기하학의 기초를 이루는 가정에 대하여>라는 제목으로 기하학연구에 획기적인 새로운 방향을 제시하였다. 리만 기하학의 어떤 부분은 클라인이 주장하는 기하학의 범주에 속하지 않으며, 특히 리만 기하학인 미분가능 다양체는 오늘날 수학의 많은 분야에서 폭넓게 연구되고 있다. 원추곡선의 연구에서 출발한 대수적 곡선에 관한 연구는 오늘날 급속히 발전하여 대수적 기하학인 대수적 다양체론으로 발전되었다. 기하학에서 출발하여 19세기 말부터 급속히 발전된 분야는 위상수학(topology)인데, 이 위상수학은 오늘날 수학의 전 분야에 상당한 영향을 미치고 있다.

제 2 장 기하학의 기원

기하학은 역사가 기록되기 훨씬 이전부터 발전되어 왔다고 추측할 수 있다. 고대문명의 발상지인 이집트, 바빌로니아, 중국등의 고대 기록 중에서 남아 있는 것은 대부분 이집트와 바빌로니아, 중국 등의 고대 기록 중에서 남아 있는 것은 대부분 이집트와 바빌로니아의 것이다. 고대 중국에서는 나무껍질이나 대나무에 기록을 남겨 놓았기 때문에 오래 견딜 수 없었다. 이에 반하여 고대 이집트의 파피루스는 건조한 기후 덕분에 오늘날까지도 일부가 남아 있고, 바빌로니아는 점토판에 쐐기형 문자로 기록하여 불에 구어서 남겼으므로 오랫동안 보존될 수 있었다. 고대 문명국가이면서 농업국가인 이집트 , 바빌로니아 중국의 사람들은 기하학의 특징은 논리에 의한 것이 아니라 실험과 관찰, 추측, 때로는 번득이는 직관에 의해서 얻은 결과로 이루어

진 것이었지만 후에 이집트와 바빌로니아의 기하학적 결과는 그리스의 기하학에 지대한 영향을 주었다.

2-1 바빌로니아의 기하학 : 플림프톤 322

19세기 초에 메소포타미아에서 활동하던 고고학자들은 약 50만 개의 바빌로이나 점토판을 발굴해 냈는데 그 점토판에는 글자가 새겨져 있었다. 수학판 중에서 가장 놀라운 것은 플림프론 322(plimpton 322)로 알려져 있고, 이 이름은 컬럼비아 대학의 플림프톤 소장품 목록번호 322라는 데서 따온 것이다. 이 판은 세 줄로 숫자가 적혀 있는데 편의상 오늘날의 10진법으로 표현되었다. 점토판에 있는 구체적인 예로 미루어 보아 바빌로니아인들은 면적과 부피를 계산하는 상당히 높은 수준의 기하학을 오래 전부터 알고 있었음을 추측할 수 있다 . 오늘날 원주는 360등분하는 것도 틀림없는 고대 바빌로니아인의 업적인 것으로 보는 것은 당연시되고 있다.

2-2 이집트의 기하학 : 파피루스

파피루스 문서가 기록된 왕조의 연대록, 수학, 의학, 종교이야기, 교훈, 시문, 민간문학 등은 고대 이집트 학문의 귀중한 연구 대상이 된다. 그 중에서도 의학의 '에베루스 파피루스'와 수학의 '모스크바 파피루스' '린드 파피루스'등이 특히 유명하다. 1850년경으로 추정되는 모스크바 파피루스는 그것이 편찬되기 훨씬 이전에 알려진 수학문제 25개가 실린 문헌이다. 기원전 1650년 이전으로 추정되는 린드 파피루스에는 원의 넓이는 그 원의 지름의 8/9을 한 변으로 갖는 정사각형의 넓이로 택하고 있음을 알 수 있다.

2-3 중국의 기하학 : 구장산술

고대 중국에서는 치수의 문제가 매우 중요한 위치를 차지하여 토목공사에 필요한 계산문제는 다루게 되었다고 추측할 수 있다. 고대 중국의 수학책 중에서 가장 중요한<구장산술>은 한 대에 씌어진 것으로 한 대 훨씬 이전의 내용도 담고 있다. 이 책은 모두 아홉 장으로 나누어져 있기 때문에 구장산술이라고 부르며 농업, 상업, 공업, 측량, 방정식의 해법, 직각삼각형의 성질 등에 관한 246개의 문제를 다루고 있다. 제1장 <방전>은 전묘의 면적을 구하는 계산에 분수가 있으며, 분자 분모 통분이라는 말도 엿볼 수 있다. <구장산술>보다 더 오래된 것으로 기원전 2000년경으로 추정되는 또 하나의 유명한 고전으로 <주비산경>이 있다. 이 책은 천문학에 관한 서적으로 일부만 수학적 내용을 담고 있는데 피타고라스 정리에 대한 논의가 있지만 증명은 없다. 중국 삼국시대의 위나라 수학자 유휘는 <구장산술>에 주석을 가하였으며 <해도산경>을 저작하였다. <구장산술주>는 단순한 주석서에 그치지 않고 수학자로서 그의 진가를 발휘한 귀중한 자료서이다. 그는 원주율을 산출함에 무한등비급수의 극한값을 구하는 방법과 유사한 추리방법을 적용하여 근사값 $3.1410 < \pi < 3.1427$을 구하였다.

제3장 논증기하학의 창조 : 그리스 기하학

고대 그리스인들은 고대문명으로부터 토지의 측량기술과 상업적인 산술을 배웠다. 고대 그리스 이전에는 기하학의 문제에 대하여 오늘날 논증이라고 부르는 추리과정을 찾아볼 수 없고 단순히 이렇게 하면 구해진다는 식일 뿐, 구할 수 있는 이유에 대해서는 밝히지 않아 체계적으로 이루어지지 않았다. 그러나 고대 그리스인들은 기원전 4세기 중엽에 고대 문명으로부터 배운 모든 기하학의 문제를 어떤 실험이나 관찰을 행하지 않고 좀더 기본적인 명제들로부터 오직 논증에 의하여 추론하여 연역적인 사슬로 얻어지는 기하학을 창조하였다. 이러한 기하학을 논증기하학(demonstrative geometry)이라고 한다.

플루타르크(Plutarch, 약100년경)는 플라톤의 유명한 '신은 기하학적으로 사고한다.'고 하였는데 기하학의 추론은 논리적으로 잘 배열되어 있기 때문에 기하학의 증명은 매우 명백하고 질서정연하여 오류가 끼여드는 것은 불가능하다. 그리스 수학은 계산술보다는 기하학이 발전하였으며, 이를 바탕으로 미술, 건축 등에 기하학적 조화와 균형을 중요시하였다. 따라서 이 시대의 수학의 모든 것은 기하학으로 간주되었다. 이러한 실용적인 목적을 초월한 논증기하학의 창조는 인류문화의 역사에서 가장 주목할 만한 사건 중의 하나이며, 과학의 모든 분야의 발전에 지대한 영향을 준 것 중 피타고라스, 히포크라테스, 플라톤, 에우독소스, 유클리드 등이다.

3-1 기하학의 창시자 : 탈레스

탈레스는 이집트의 경험적, 실용적 지식을 바탕으로 그 당시보다 훨씬 이전부터 알려진 다음과 같은 기하학적 결과를 최초로 논리적인 추론에 의해 증명함으로써 기하학의 창시자라고 불린다.

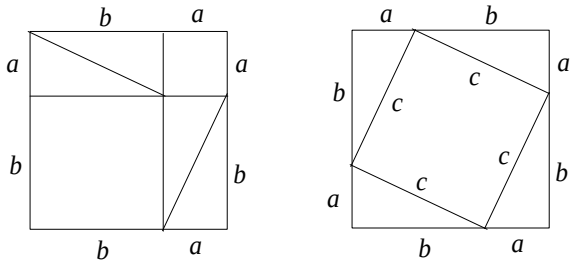
1. 원은 임의의 지름에 의하여 이등분된다.
2. 이등변 삼각형의 두 밑각은 서로 같다.
3. 두 직선이 만나서 만드는 맞꼭지각은 서로 같다.
4. 두 삼각형에서 대응하는 두 각이 서로 같고 대응하는 한 변이 서로 같으면 두 삼각형은 서로 같다.
5. 반원에 내접하는 원주각은 직각이다.

위의 내용에 대한 그의 증명은 전해지지 않지만, 유클리드의 <원론>에 있는 일부 증명은 탈레스의 증명으로 간주된다.

3-2 최초로 위대한 정리 : 피타고라스

피타고라스 학파의 교육은 구두로 행해졌고 피타고라스 학파의 가장 큰 업적은 수학사에서 최초로 위대한 결과인 피타고라스의 정리 '직각삼각형의 빗변의 제곱은 다른 두 변의 제곱의 합과 같다.'에 대한 증명의 발견이다. 이 정리는 고대 문명국가인 바빌로니아, 중국에서 이미 알려져 있었지만 일반적인 증명은 최초로 피타고라스에 의하여 이루어 졌다.

증명은 그림에서 보듯이 같은 것을 제거하면 주어진 직각삼각형의 두 변에 각각 대응하는 두 정사각형이 남는다. 따라서 주어진 직각삼각형의 빗변에 대응하는 정사각형의 면적의 합과 같게 된다.



피타고라스 학파의 또 하나의 업적은 피타고라스 정리의 결과인 무리수의 발견이다. 직선 위의 모든 점은 유리수로 완전히 덮힐 수 있을 것으로 생각했다. 그런데 피타고라스 학파는 정사각형의 대각선과 길이가 같은 거리 대응하는 어떤 유리수도 존재하지 않음을 발견했다.

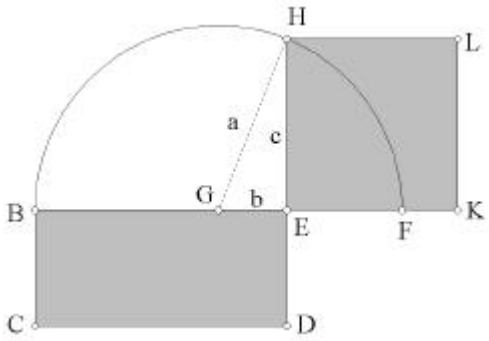
3-3 궁형구적법의 발견 : 히포크라테스

히포크라테스는 처음으로 공리와 공준을 만들어 그것을 바탕으로 논리적인 방법으로 기하학의 정리를 전개시킨 <기하학의 원론>을 저술하여 기하학을 한 단계 끌어올리는 공헌을 하였다.

히포크라테스의 가장 위대한 업적은 궁형구적법(quadrature of the lune)을 증명한 것이다. 궁형(lune)이란 지름이 다른 두 원의 호로 들러싸인 초승달 모양의 평면도형을 말하며, 평면도형의 구적이란 컴퍼스와 눈금이 없는 곧은 자만 이용하여 주어진 평면도형과 똑같은 면적의 정사각형을 작도하는 것을 말한다.

(1) 직사각형의 구적

(증명)



・직사각형 BCDE에서 BE를 오른쪽으로 연장하여 ED 와 같은 거리인 EF를 선택한다.

・BF의 중점 G에서 반원을 그려 ED의 연장선과 만나는 점을 H라한다.

・EH을 한 변으로 하는 정사각형 EHLK를 그린다.

・DE=EF= $a-b$, BE= $a+b$

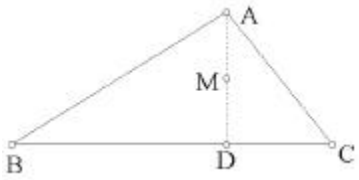
・BCDE면적= BE×ED= $(a+b)(a-b)$

= c^2 =EHLK면적

(2) 삼각형의 구적

・삼각형 ABC의 A에서 BC에 수선을 내려 그 발을 D라한다.

・AD의 중점을 M이라 한다.



・△ABC면적= $\frac{1}{2}$ ×BC×AD=BC×DM

=BC와 DM을 두 변으로 하는 직사각형 면적

(3) 궁형 구적

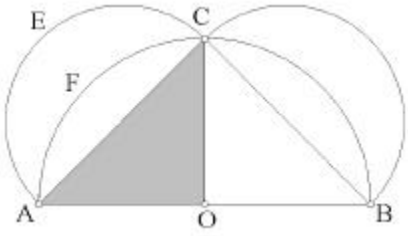
・△ABC는 반원에 내접하는 직각삼각형이다.

・△AOC≡△BOC에서 AC=BC이다.

・ $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 = 2(AC)^2$

・AB는 반원 ACB의 지름, AC는 반원 AEC의 지름에서

$$\frac{\text{반원 } AEC\text{의 넓이}}{\text{반원 } ACB\text{의 넓이}} = \frac{(AC)^2}{(AB)^2} = \frac{1}{2}$$



・궁형 AECF의 넓이= 반원 AEC의 넓이 - 활꼴 AFC의넓이

= 4분 원 AFCO의 넓이-활꼴 AFC의 넓이

= △ACO의 넓이

3-4 귀류법과 역설 : 제논

참 (true)이란 가정 하에 어떤 모순에 귀결되는 것을 제시하여 간접적으로 참이 되지 않으면 안 된다는 것을 주장하는 논증방법을 최초로 사용하였다. 수학자들은 이를 귀류법 또는 제논의 논법이라고 한다.

1. 이분법 : 운동은 불가능하다. A에서 B까지 움직인다는 것은 B에 도착하기 전에 AC의 중점인 D를 지나야 한다. 이와 같이 무한히 계속되므로 운동은 시작 조차할 수 없다.
2. 아킬레스 : 아킬레스는 자신의 전방에 기어가고 있는 거북이를 따라잡을 수 없다. 왜냐하면 그가 거북이가 처음 있던 위치에 도착하면 그 사이에 거북이는 전진하여 앞에 있게 된다. 또 그가 거북이가 있던 위치에 도달하면 그 동안 거북이는 좀더 전진한다. 이 논의를 되풀이하면 아킬레스는 결코 거북이를 따라 잡을 수 없다.
3. 화살 : 나는 화살은 정지하고 있다. 왜냐하면 시간은 각 순간으로 구성되어 있고, 또한 순간은 분할 될 수 없다. 그러므로 나는 화살은 각 순간마다 일정한 고정된 위치에 있으므로 화살은 움직일 수 없다.

4. 경기장

3-5 고대 그리스의 난문제 : 3대 작도문제

1. 원적문제 : 주어진 원과 동일한 넓이를 갖는 정사각형을 작도하는 문제
2. 배적문제 : 주어진 정6면체의 두 배의 부피를 갖는 정6면체의 한 변의 길이를 작도하는 문제
3. 각의 3등분 : 임의의 각을 3등분하는 선을 작도하는 문제

3-6 이데아론의 기하학 : 플라톤

플라톤(Plato, 427-347B.C.)은 소크라테스(socrates, 470-399B.C.) 문하에서 공부하였고 키레네(Cyrene)의 데오도로스(Theodorus)로부터 기하학을 배웠고 이탈리아에서는 피타고라스 학파 사람들과 사귀었다. 그 결과 스승인 소크라테스는 수학을 멸시하였지만 반대로 플라톤은 수학을 사랑하였다. 플라톤을 수학에서 높이 평가하는 이유는 그의 수학에 대한 열정과 그가 제공한 학문 분위기 때문이다.

플라톤은 "사람들은 교육과 경험을 통해 학습하지 않은 기하학적 진리를 알고 있으며, 이 지식은 사람들이 지각하고 확인 할 수 있는 불변인 보편적인 진리의 한 예이다.'라고 주장하였다. 또한 진실로 "존재한다"는 것은 비물질적이고, 시간과 더불어 변하는 일이 없이 동일한 것으로 머무르는 영원불변한 것이어야 한다고 하였으며 이것을 이데아(idea)라고 불렀고, '이데아는 육체의 감각에 의해 파악할 수 없고 영혼의 눈인 이성에 의해서만 관찰할 수 있다.'고 하였다. <공화국(republic)에서 다음과 같이 쓰고 있다. '수학에 대한 연구는 수천 개의 눈보다 더 정신조직을 움직이게 하고 발전시킨다. 그 이유는 수학을 통해서만 진리가 이해될 수 있기 때문이다.' 또 '수학자는 설명이 필요 없는 존재를 인정할 수 있다. 또 이들 가설에서 논리를 전개하고 구하고자 하는 결론을 얻어낸다. 눈에 보이는 도형을 이용하고, 그것에 관하여 따지지만 그들은 눈에 보이는 도형을 생각하는 것이 아니고 도형이 나타내는 사실만 생각한다.' 말하였다.

3-7 비례론과 실질법 : 에우독소스

피타고라스 학파에 의한 같은 단위로 젤 수 없는 통약불가능한 수(incommensurable number)의 발견. 즉 오늘날의 용어로 쓰면 무리수 발견은 오랫동안 그리스 수학자에게 많은 충격을 주었다. 그 당시까지만 해도 두 삼각형의 닮은꼴에 대한 증명은 원래 어떤 두 변의 길이도 통약가능하다는, 즉 같은 단위로 잴 수 있다는 전제 조건하에 이루어 진 것이어서 '통약불가능한 수는 어떻게 크기를 비교할 수 있는가?' 하는 문제는 두 삼각형의 닮은꼴이라는 것을 증명하는 데도 문제가 되었다.

안티폰(Antiphon, 기원전 430년경)은 원과 같은 면적을 가진 정사각형을 작도하는 문제, 즉 원적문제를 해결하려고 애썼다. 그는 '한 원에 내접하는 정다각형의 변의 수를 계속 두 배로 해 나감으로써 마침내 원과 다각형 사이의 면적의 차를 없앨 수 있다.'는 생각을 발전시켜 주어진 다각형의 면적과 같은 정사각형을 만들어 낼 수 있기 때문에 결국 '원과 같은 면적을 가진 정사각형도 만들 수 있다.'고 주장했다. 그러나 이 주장은 양을 무한하게 분할할 수 있다는 원칙과 상치되어 안티폰의 과정은 원 전체의 면적을 만들어 낼 수 없다는 이유로 즉각적인 비판에 직면하게 되었다. 결국 이 문제는 추론에서 사고의 결함을 교묘히 피한 것이 에우독소스의 실진법(method of exhaustion)이다. 실진법을 가장 잘 활용한 사람은 아르키메데스이다. 논증의 기본원리로 에우독소스의 실진법이 이용된 예는 유클리드의 <원론> 제XII권 명제2 '두 원의 면적은 지름 위의 정사각형의 면적에 비례한다.'의 증명에서 잘 나타나 있다.

3-8 공준적 방법의 기하학 : 유클리드

유클리드(Euclid, 300?-?B.C.)는 그리스 기하학에 플라톤의 철한 이데아론을 반영하여 명확한

논법으로 체계화된 결과들로 이루어진 13권의 명저<원론(Elements)>을 편찬했다. 이 책은 기하학에 관한 선조들의 업적을 토대로 하여 공준적 방법이 기하학에 최초로 적용된 역사적으로 기하학적 사고에 전환점을 가져온 매우 중요한 기념비적인 작품이다.
<원론>은 제Ⅰ권부터 제Ⅳ권까지이고 그리고 제Ⅶ권, 제Ⅸ권은 피타고라스 학파의 이론이고, 제Ⅷ권은 아르키타스(Archytas), 제Ⅴ,Ⅵ권, 제Ⅻ권은 에우독소스(Eudoxus), 그리고 제Ⅹ권,Ⅻ권은 테아이테토스 (Theatetus)의 이론이다.
기하학적인 사고는 오류에 빠지는 일이 없으므로 기하학은 인간의 지성을 계발하고, 인간의 사고 판단을 바르게 한다. 따라서 이러한 논리적으로 체계화된 기하학을 익히는 자는 지성을 획득할 수 있다.

3-9 고대의 위대한 수학자 : 아르키메데스

아르키메데스(Archimedes, 287-212B.C.)는 시러큐스의 왕 히에론(Hieron)의 왕관에 대한 이야기가 유명하다. '어떤 물체가 액체 속에 있을 때 그 물체의 무게는 그것이 밀어낸 액체의 무게만큼 줄어든다.'는 사실을 발견했다. 열 개의 논문이 오늘날까지 전해 내려오고 있는데 평면기하학에 관해서는 다음 세 가지가 있다.
<원의 측정(measurement of a circle)>
<포물선의 구적법(quadrature of the paravola)>
<나선에 관하여(on sparials)>
<원의 측정>에서 명제 1은 '원의 넓이는 직각을 낀 두 변이, 한 변은 원의 반지름과 같고 다른 한 변은 원둘레와 같은 직각삼각형의 넓이와 같다.' 명제 3는 원에 내접 외접하는 정 96다각형의 둘레를 이용하여 π를 계산하는 고전적인 방법을 처음으로 시도하여 놀라운 근사값 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ 을 얻었다.
<포물선의 구적법>에는 '한 포물선과 그 포물선을 자르는 현에 의해 생기는 도형의 면적은 밑면이 현이고 다른 한 꼭지점은 포물선 위의 점으로서 그 곳에서의 접선이 현과 평행이 되는 내접삼각형의 면적의 4/3가 된다.'
<나선에 관하여>에는 '점 P가 어떤 사선을 따라서 고른 속도로 운동하고 또 평면의 원점을 중심으로 일정한 속도로 회전할 때 생기는 점 P의 궤적을 나선이라 한다.' 실제로 아르키메데스는 원적문제를 해결하기 위해 나선을 만들었다고 전해진다.
아르키메데스의 현존하는 작품 중 3차원 공간 기하학에 관한 것은 <구와 원기둥에 관하여(onthe sphere and cylinder)>이다. 유클리드가 <원론>에서 구의 부피에 대해서만 언급한 것을 아르키메데스는 최초로 기하학에서 대상을 구의 겉넓이에 관해 언급하여 이 논문의 가치가 더욱 돋보이는 것이다. 그의 첫째 정리는 단순한 내용인 만일 다각형이 원에 외접하면 그 다각형의 둘레의 길이는 원둘레의 길이보다 길다.
명제 13은 '위 아래 면의 넓이를 뺀 직원기둥의 겉넓이는 직원기둥의 밑면의 지름과 그 높이 사이의 비례중항을 반지름으로 갖는 원의 넓이와 같다.' 구의 표면을 이미 알고 있는 원뿔이나 원뿔대를 구에 내접 또는 외접시키면서 구의 겉넓이에 무한히 접근시켜 오차를 실진시켜 명제 33 '임의의 구의 겉넓이는 구의 대원의 넓이의 네 배이다.'와 '구의 부피는 대원을 밑면으로 하고 구의 반지름을 높이로 하는 원뿔의 부피의 네 배와 같다.'를 얻는다.

즉, 구의 겉넓이 $= 4\pi r^2 = 4(\pi r^2) = 4$ (대원의 넓이)

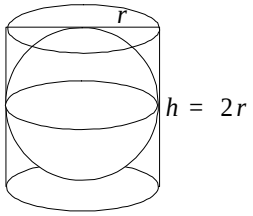
구의 부피 $= \frac{4}{3}\pi r^3 = 4(\frac{1}{3}\pi r^2 r) = 4$ (원뿔의 부피)

아르키메데스의 구의 겉넓이와 부피에 대한 이론의 전개는 명제 33과 34의 따름정리로 '구에 외접하는 원기둥을 만들면 원기둥의 겉넓이는 구의 겉넓이의 3/2과 같고, 원기둥의 부피는 구

의 부피의 3/2과 같다'

즉, 원기둥의 겉넓이 $= 2\pi r(2r) + \pi r^2 + \pi r^2 = 6\pi r^2 = \frac{3}{2}(4\pi r^2) = \frac{3}{2}$ (구의 겉넓이)

원기둥의 부피 $= \pi r^2(2r) = 2\pi r^3 = \frac{3}{2}(\frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{3}{2}$ (구의 부피)



아르키메데스가 발견한 많은 정리의 증명에 대한 연역과정을 설명하고 있으며, 논증의 기본원리로 실진법을 이용하여 엄밀하게 증명하고 있음을 말해주고 있다. 이 논문은 적분법의 착상과 대단히 밀접한 관계를 갖고 있다.

3-10 원추곡선의 재발견 : 아폴로니우스

천문학자로 유명한 아폴로니우스는 다양한 주제에 관하여 저술하였지만 최고의 걸작은 천문학 분야가 아니라 수학 분야인 고대 그리스의 기하학의 기법을 광범위하게 사용한 <원추곡선론(conic sections)>이다. 이것은 모두 여덟 권의 책으로 약 400개의 명제가 실려 있으며, 이 명제들은 원추곡선에 대한 철저한 기하학의 결과로서 이전의 원추곡선에 관한 메나에크무스(Menaechmos:340? B.C.), 아리스타에우스(Aristaeus), 유클리드의 초기 저작을 총망라한 것이다. 아폴로니우스 이전의 그리스인들은 원추곡선을 각각 꼭지각이 예각, 직각, 둔각인 서로 다른 세 직원뿔을 모선에 수직인 평면으로 각각을 절단하면 단면은 타원, 포물선, 쌍곡선이 만들어 진다고 정의했었다. 원추곡선에 대하여 타원(ellipse), 포물선(parabola), 쌍곡선(hyperbola)이라는 이름을 최초로 사용한 사람은 아폴로니우스이며, 초기 피타고라스 학파가 면적에 사용한 용어로부터 따 온 것이다. 그리스어로 ellipsis(부족하다), parabole(일치한다), hyperbole(초과한다)라고 하였다. 제II권에서는 점근선, 공액쌍곡선, 접선의 성질을 다루고, 제III권에서는 원추곡선의 초점의 성질 등을 포함한 정리들을 다루고, 그리고 제IV권에서는 제III권에서의 극과 극선의 조화 성질에 관한 것들을 다루고 있다. 제V권은 아폴로니우스의 <원추곡선론>을 다루고 있다. <평면자취론>에는 오늘날 아폴로니우스의 원 이라고 부르는 'A와 B가 고정된 점이고 $k\ (\neq 1)$가 주어진 상수일 때 AP/BP=k인 점 P의 자취인 원이다.'

3-11 기하학의 결과 : 삼각법

에라토스테네스는 순수수학, 천문학, 지리학, 역사학, 철학. 시를 비롯한 모든 분야에 박식하였고 4년마다 한번의 윤년을 두어 1년을 365일로 하는 태양력을 제안하기도 했다. 그의 가장 유명한 업적은 에라토스테네스의 체, 즉 일정한 수가 주어지면 그 수 보다 작은 소수들을 찾아내는 방법을 고안한 것이다. 기원전 150년경에 아시아 지역인 미노아(Minor)의 니케아(Nicaea)에서 활동했던 히파르코스(Hipparchus, 195?-125?B.C.)에 의해 최초로 삼각표가 만들어졌다. 그를 가리켜 삼각법의 아버지라고 부르게 된 것은 이 때문이다. 그의 유명한 관찰은 로드스(Rhodes)에 있는 천문대에서 이루어졌다. 정확한 관찰자로 유명한 그는 음력의 한달 기간을 현재 우리가 사용하고 있는 기간과 1초도 안되는 오차의 범위 내에서 결정했으며 황도와 적도와의 경각이 23。51′ 임을 측정했고 달의 시차가 57′ 라는 거의 정확한 값을 계산했다. 또한 그는 지구표면 위의 위치를 정하기 위해서 위도와 경도를 사용할 것을 주장했으며, 원을 360。로 분할하는 것을 그리스에 소개하였다.

3-12 공선점에 관한 정리 : 메넬라우스

메넬라우스(Menelaus)**는 기원전** 100**년경에 살았던 그리스의 천문학자이다. 그의 논문** <**구면론**(Sphearica)>**이 아라비아어로 보존되어 있어 그리스시대 당시의 삼각법의 발전에 대한 연구에 상당한 정보를 제공하고 있다. 제**Ⅰ**권에서는 구면삼각형을 정의한 수 유클리드가** <**원론**>**에서 평면삼각형에 대하여 세운 많은 명제, 예를 들면 합동에 관한 정리, 이등변삼각형에 관한 정리 등을 구면삼각형에 대하여 세우고 있다.**

1. **두 구면삼각형은 대응각이 서로 같으면 합동이다.**
2. **구면삼각형의 내각의 합은 두 직각(** $180°$ **)보다 크다.**

제Ⅱ**권에서는 천문학에 관한 흥미 있는 정리가 실려 있다. 제**Ⅲ**권은 그 당시의 구면삼각법을 싣고 있으며 이 구면삼각법은 오늘날 메넬라우스 정리** (Menelaus' theorem)**로 알려진 평면에서의 명제로부터 주로 추론된 것이다.**

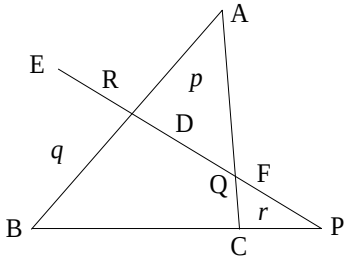
기하학에서 증명을 편리하게 하기 위하여 새로 도입된 것 중의 하나는 부호를 갖은 크기 (sensed or signed magnitudes)**의 사용이다. 비록** 17**세기에 지라르**(Girard A. 1595-1632), **데카르트와 여러 수학자가 기하학에 음의 선분**(negative segments)**을 소개하기도 했지만 부호를 갖은 크기에 대한 개념은** 1803**년 카르노**(Carnot L.N.M. 1753-1823)**의** <**위치기하학**(geometrie de position)>**에서 처음으로 소개되었으며 체계적으로 사용되었다. 주어진 직선에 대하여 한 방향을 양의 방향**(positive direction), **다른 방향을 음의 방향**(negative directive)**으로 선택할 수 있다. 지라르는** 1626**년에** sine, tangent, secent**의 약자** sin, tan, sec**를 최초로 사용한 삼각법에 관한 논문을 발표한 것으로 유명하다.**

세바의 정리 (Ceva`s theorem)**는 증명에서 논증의 중요한 기본원리로 메넬라우스 정리가 사용된 메넬라우스 정리와 아주 밀접한 정리임에도 불구하고 메넬라우스의 정리는 고대 그리스시대에 발견된 것에 비해 세바의 정리는 메넬라우스의 정리가 발견된 후 약** 1800**년이 지난** 1678**년에 이탈리아의 공학자이며 수학자인 세바에 의해 발견되었다.**

메넬라우스(Menelaus)**의 정리**

삼각형 ABC**의 각변** BC, CA, AB**의 위 또는 연장선 위의 세 점** P, Q, R**가 동일 직선 위에 있기 위한 필요충분조건은**

$$\frac{AR}{RB}\,\frac{BP}{PC}\,\frac{CQ}{QA} = -1 \quad \cdots\cdots ①$$ **이다.**



(점 P, Q, R**를 메넬라우스의 점**(Menelaus points)**이라 한다.**

증명 ($\Leftarrow$) **오른쪽 그림에서** P, Q, R**가 동일 직선에 있다고 하면 닮은 삼각형에 의해**

$$\frac{AR}{RB} = \frac{p}{q},\ \frac{CQ}{QA} = \frac{r}{p},\ \frac{BP}{PC} = -\frac{q}{r} \Rightarrow \frac{AR}{RB}\,\frac{BP}{PC}\,\frac{CQ}{QA} = -\frac{p}{q}\,\frac{q}{r}\,\frac{r}{p} = -1$$

($\Rightarrow$) ①**이 만족한다고 가정하면, 두 점** Q, R**를 지나는 직선이** BC**와** P'**에서 만나면** R, Q, P'**은 동일 직선에 있다.**

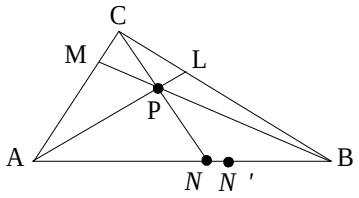
$$\frac{AR}{RB}\,\frac{BP'}{P'C}\,\frac{CQ}{QA} = -1 \quad \cdots\cdots ②$$

①÷②**에서** $\frac{BP'}{P'C} = \frac{BP}{PC}$ ……③. ③**의 양변에** 1**을 더하여 정리하면**

$$\frac{BP'}{P'C} + 1 = \frac{BP}{PC} + 1 \Rightarrow \frac{BC}{P'C} = \frac{BC}{PC} \Rightarrow P \equiv P' \Rightarrow R, Q, P$$ **는 동일 직선에 있다.**

세바(Cevian)의 정리

삼각형 ABC의 각 꼭지점 A, B, C에서 각변 BC, CA, AB위의 점 L, M, N을 연결하는 직선 AL, BM, CN이 한 점에서 만나기 위한 필요충분조건은 $\frac{AM}{MC}\frac{CL}{LB}\frac{BN}{NA} = 1$ ……①**이다.**



(선분 AL, BM, CN을 세바의 선분(Cevian lines)이라 한다.

증명 (⇐) **세 직선** AL, BM, CN **이 한 점** P **에서 만난다고 하자.** $\triangle BNC$ **와 횡단선** AL **,** $\triangle ACN$ **과 횡단선** BM **에서 메넬라우스 정리를 적용하면**

$$\frac{BA}{AN}\frac{NP}{PC}\frac{CL}{LB} = -1, \quad \frac{AM}{MC}\frac{CP}{PN}\frac{NB}{BA} = -1$$

두 식을 곱하면 $\frac{AM}{MC}\frac{CL}{LB}\frac{BN}{NA} = 1$

(⇒) **①이 만족한다고 가정하면, 두 직선** BM **과** AL **이 한 점** P **에서 만나고, 선분** CP **가 변** AB **와** N' **에서 만난다고 하면 선분** AL, BM, CN' **은 한 점** P **에서 만나므로**

$$\frac{AM}{MC}\frac{CL}{LB}\frac{BN'}{N'A} = 1 \quad \cdots\cdots②$$

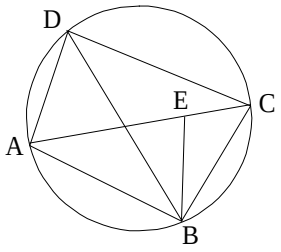
①÷②**에서** $\frac{BN'}{N'A} = \frac{BN}{NA}$ **따라서** $N' = N$ **이다.**

동일 직선 위에 있는 점들은 공선점(collinear points), 그리고 동일 점 위에 있는 직선들을 공점선 (concurrent lines)이라고 부른다. 따라서 메넬라우스의 점은 공선점이고, 세바의 선분은 공점선이다.

3-13 가장 위대한 <알마게스트> ; 프톨레마이오스

프톨레마이오스의 정리(Ptolemy's Theorem)는 '원에 내접하는 사변형에서 두 대각선의 곱은 두 쌍의 대변의 곱의 합과 같다.'

이것은 원에 내접하는 임의의 사변형 ABCD에 대하여, 대각선 AC 위에 ∠ABE=∠DBC를 만족하는 점 E를 택하면, 같은 호에 대한 원주각은 서로 같다는 사실로부터



$\triangle ABE \sim \triangle DBC \Rightarrow AB/AE = DB/DC$

$\Rightarrow (AB)(DC) = (DB)(AE)$ ……①

$\triangle ABD \sim \triangle EBC \Rightarrow AD/DB = EC/CB$

$\Rightarrow (AD)(CB) = (DB)(EC)$ ……②

①+②**하면** $(AB)(DC)+(AD)(CB)=(DB)(AE+EC)=(DB)(AC)$

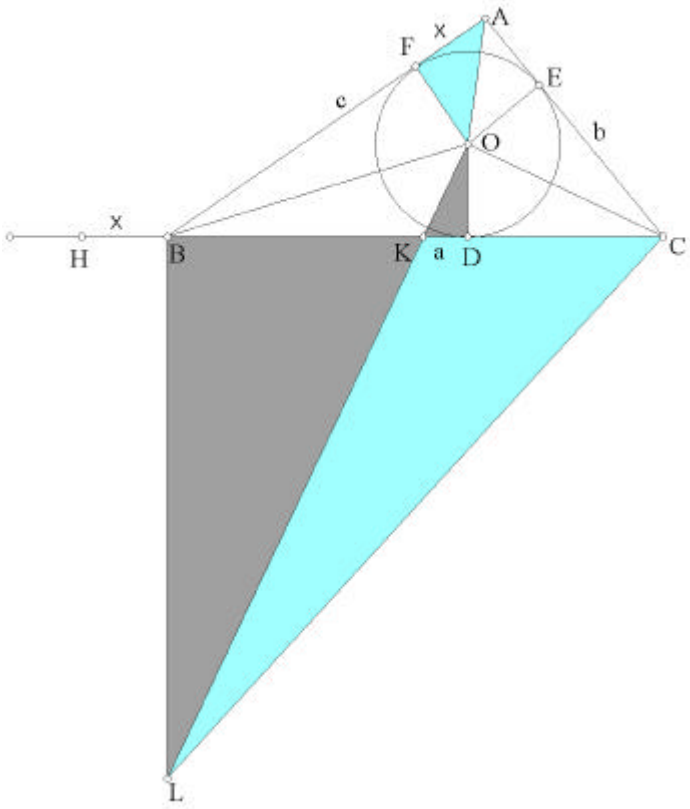
3-14 위대한 삼각형의 면적공식 : 헤론

헤론(Heron, 75년경?)의 저작은 크게 두 가지로 분류할 수 있는데, 하나는 기하학에 관한 것으로 주로 측정의 문제를 다루고, 또 하나는 역학에 관한 것으로 기계적 고안품에 관한 설명으로 되어 있다. <측정론(Metrica)>으로서 세 권의 책으로 되어 있는데, 1896년에 콘스탄티노플에서 쇠네(R. schone)가 발견한 것이다. <측정론>의 제Ⅰ권은 정사각형, 직각사각형, 사다리꼴, 그 밖의 다양한 사각형 또 이등변 삼각형으로부터 12각형까지의 다각형, 원, 원의 일부분, 타원, 포물선과 선분으로 만들어지는 부분 등의 면적을 다루고, 또한 원기둥, 원뿔, 구, 구면띠의 곡면적도 다루고 있다 특히 삼각형의 세 변의 길이로 삼각형의 면적을 구하는 공식으로 각 변의 길이가 a, b, c **인 삼각형의 면적은** $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(s = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)$ **이다.**

제Ⅱ권은 원뿔, 원기둥, 평행 육면체, 각기둥, 피라미드 등의 부피와 원추, 피라미드, 구, 구면대

(spherical segment), **원환체 다섯 개의 정다면체, 각뿔대**(prismatoid) **등의 절두체**(frustrum)**의 부피를 다루고 있다. 제Ⅲ권은 면적과 부피 등을 주어진 비로 나누는 문제를 다루고 있다.**

※ 헤론(Heron)**의 공식**



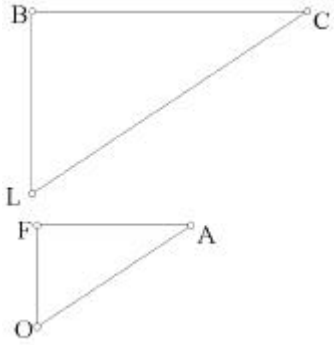
△ABC의 내접원의 반지름이 r **이면** $S = \frac{s}{2} r$ …… ① (**단,** $a + b + c = 2s$)

$AF = BH$ **이면** $CH = HB + BD + DC = (a + b + c)/2 = s$

①에서 양변을 제곱하면

$$S^2 = \{(a + b + c)/2\}^2 \cdot r^2 = CH^2 \cdot OD^2 \quad \cdots\cdots ②$$

△AOF ∽ △CLB에서



BC : BL = FA : FO = BH : OD

BC : BH = BL : OD = BK : KD

$$\frac{CB}{BH} = \frac{BK}{KD} \quad \cdots\cdots ③$$

③의 양변에 1을 더하여 정리하면

$$\frac{CB}{BH} + 1 = \frac{BK}{KD} + 1 \Rightarrow \frac{CB + BH}{BH} = \frac{BK + KD}{KD}$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{BD}{KD}$$

$$CH : BH = BD : KD$$

$$CH^2 : CH \cdot BH = BD \cdot DC : DC \cdot KD = BD \cdot DC : OD^2$$

$$\Rightarrow CH^2 \cdot OD^2 = CH \cdot HB \cdot BD \cdot DC = s(s - a)(s - b)(s - c) \quad \cdots\cdots ④$$

④를 ②에 대입하면

$$S^2 = CH^2 \cdot OD^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

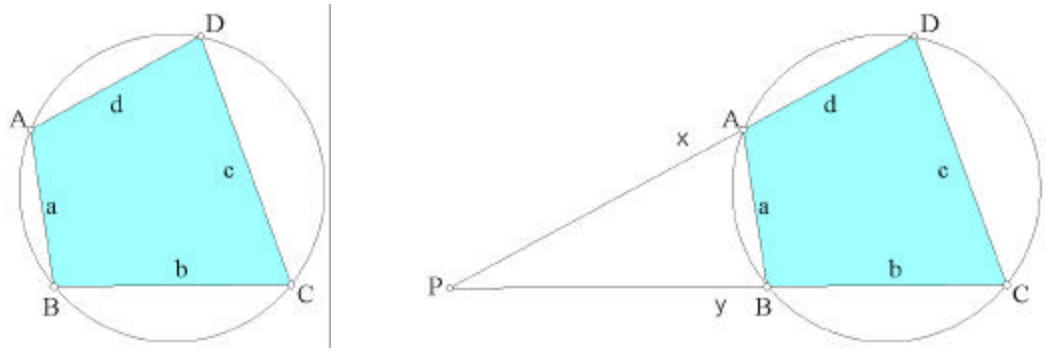
$$\therefore S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

※ **브라마굽타(Bramagupta)의 공식**

원에 내접하는 사각형 ABCD의 면적을 S라하고

변을 a, b, c, d**라 하면**

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad (\text{단, } 2s = a+b+c+d)$$



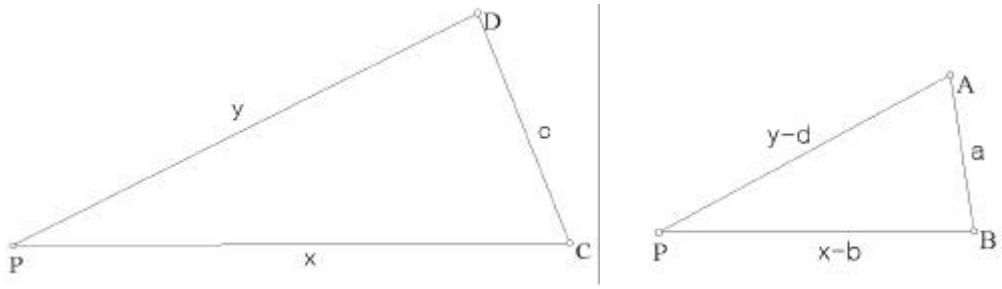
변 AD와 BC의 연장선을 그어 만나는 점을 P라 하고 선분 PD와 PC의 길이를 각각 y, x**라 하면**

△PDC**의 면적** $M = \sqrt{(\frac{x+y+c}{2})(\frac{x+y+c}{2}-x)(\frac{x+y+c}{2}-y)(\frac{x+y+c}{2}-c)}$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(y+c-x)(x+c-y)(x+y-c)} \quad \cdots\cdots ①$$

∠ADC+∠ABC= 180° **이고** ∠ABC+∠ABP= 180° **이므로** ∠ADC=∠ABP

△PDC ∽ △PBA



$$\frac{\triangle PBA}{\triangle PDC} = \frac{a^2}{c^2} \Rightarrow \frac{\triangle PDC}{\triangle PDC} - \frac{\triangle PBA}{\triangle PDC} = \frac{c^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\square ABCD}{\triangle PDC} = \frac{c^2-a^2}{c^2} \quad \cdots\cdots ②$$

△PDC ∽ △PBA**에서**

$$\frac{x}{c} = \frac{y-d}{a} \quad \cdots \text{ i)} \qquad \frac{y}{c} = \frac{x-b}{a} \quad \cdots \text{ ii)}$$

i) + ii)에서 $x+y = \frac{c(b+d)}{c-a}$

$$x+y+c = \frac{c}{c-a}(-a+b+c+d),\ x+y-c = \frac{c}{c-a}(a+b-c+d) \quad \cdots\cdots ③$$

i) - ii)에서 $x-y = \frac{c(b-d)}{a+c}$

$$x-y+c = \frac{c}{a+c}(a+b+c-d),\ -x+y+c = \frac{c}{a+c}(a-b+c+d) \quad \cdots\cdots ④$$

③, ④를 ①에 대입하면

$$M = \frac{c^2}{4(c^2 - a^2)}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)} \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤을 ②의 $\square ABCD = \frac{c^2 - a^2}{c^2} \times \triangle PDC$에 대입하면

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

3-15 기하학의 계승자 : 파푸스

아폴로니우스가 죽은 지 500년이 지난 3세기 말엽에 알렉산드리아에 한 정열적이고 유능한 학자가 다시 기하학에 대한 관심을 불러일으키려고 노력하였는데 그가 바로 파푸스(Pappus, 기원 후 300년경)였다. 그는 유클리드의 <원론>, <자료론> 및 프톨레마이오스의 <알마게스트> 등에 대한 주석을 썼으며 이것은 그 후의 주석가들의 저작에 깊은 영향을 주었다. 파푸스가 쓴 거작 <수학의 집성(mathematical collection)> 은 당시까지 알려진 기하학의 연구에 대한 주석 및 안내서로서 많은 독창적인 명제, 개정, 확장, 역사적 내용 등이 실려 있다.

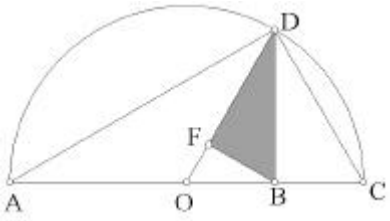
'선분 AC위에 중점이 아닌 점 B를 잡고, B에서 AC에 수선을 올릴 때 그것이 AC를 직경으로 하고 중심이 O인 반원과 D에서 만나고, 또한 B에서 만나고 OD에 내린 수선의 발을 F라 하면 OD, BD, FD는 각각 두 선분 AB와 BC의 산술평균, 기하평균, 조화평균이다.'

증명

기하평균 : $\triangle ADC, \triangle ABD, \triangle DBC$에서

$$BD^2 = (AB)(BC) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore \ BD = \sqrt{(AB)(BC)}$$



산술평균 : $\triangle OBD$에서 $OD^2 = OB^2 + BD^2 \quad \cdots\cdots ②$

$$BO = |BC - AB|/2 \quad \cdots\cdots ③$$

①과 ③를 ②에 대입하면

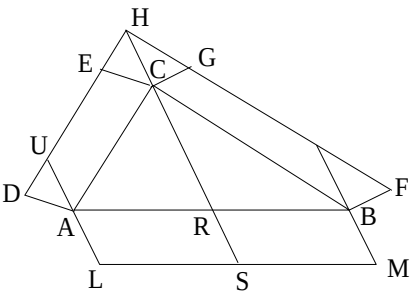
$$\therefore \ OD = \frac{AB + BC}{2}$$

조화평균 : $\triangle DBO \backsim \triangle DFB$에서 $\frac{FD}{DB} = \frac{DB}{OD}$

$$\therefore \ FD = \frac{DB^2}{OD} = \frac{2(AB)(BC)}{AB + BC}$$

제3절은 삼각형에서의 부등식을 다루고 있으며, 우리가 중학교 또는 고등학교에서 배운 중선의 정리 또는 파푸스의 정리는

'△ABC의 변 BC의 중점을 D라 할 때 $(AB)^2 + (AC)^2 = 2((AD)^2 + (BD)^2)$이다.'가 나온다. 이 정리는 평면도형을 이용하여 증명할 수도 있지만 직교좌표계를 이용하면 쉽게 증명할 수 있다. 제Ⅳ권에는 시작부분에 피타고라스 정리에 대한 기하학적 확장을 다루고 있는데, 이것은 피타고라스 정리에 대한 가장 뛰어난 확장으로 평가되고 있다. 그는 피타고라스 정리를 다음과 같이 확장했다.



'임의의 삼각형 ABC에 대하여 CADE와 CBFG를 각각 변 CA와 CB위에 외접하는 임의의 평행사변형이라고 할 때 DE와 FG의 연장선의 교점 H 에 대하여 AL과 BM을 HC와 길이가 같고 평행하도록 그러면 평행사변형 ABML의 면적은 평행사변형 CADE와 CBFG의 면적의 합과 같다.'

제Ⅴ권은 주로 등주도형론(isoperimerty)에 관한 내용으로 동일

한 길이의 둘레를 갖는 도형의 면적이나 동일한 크기의 표면적을 갖는 입체의 부피를 비교하고 있다.

제Ⅶ권은 명제 '주어진 원에 삼각형을 내접시킬 때 삼각형의 각 변이 연장되면 일직선 위에 주어진 세 점을 지나도록 내접시킬 수 있다.'의 한 해를 주고 있다. 이것은 18세기에 크레머(cramer)에 의해서 세 점이 일직선 위에 있지 않아도 되는 경우로 일반화되었고, 1776년에는 카스틸론(castillon)이 이 일반화에 대한 해를 발표해서 흔히 이 문제를 카스틸론-크레머의 문제라고 부른다. 제Ⅶ권에서는 최초로 세 원추곡선의 초점과 준선의 성질에 대한 내용을 다루고 있다. 그리고 제Ⅷ권에서도 제Ⅶ권처럼 파푸스의 많은 독창적인 내용을 담고 있는데 특히 다섯 개의 점이 주어 질 때 이를 지나는 원추곡선을 작도하는 문제가 실려있다.