7. 인도와 아라비아의 기하학

7-1 인도의 기하학

☞ 인도인들의 기하학 : 경험에 의존

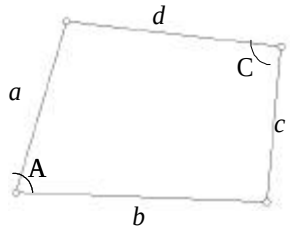
1. 브라마굽타의 사변형

가. 일반적인 사각형의 면적

K : 면적 a, b, c, d : 사각형의 네 변일때,

$$s = \frac{(a + b + c + d)}{2}$$

$$K = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd\cos^2\left(\frac{A + C}{2}\right)}$$



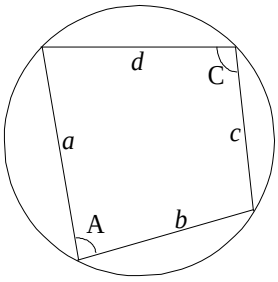
나. 순환사변형의 면적

(원에 내접하는 사각형의 면적)

K : 면적 a, b, c, d : 사각형의 네 변일때,

$$s = \frac{(a + b + c + d)}{2}$$

$$K = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$



2. 브라마굽타의 정리

네 연속 변이 a, b, c, d인 순환사변형의 두 대각선 m, n은

$m^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{(ad + bc)}$, $n^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)}$ 이다.

만일, a, b, c, A, B, C가 양의 정수로서

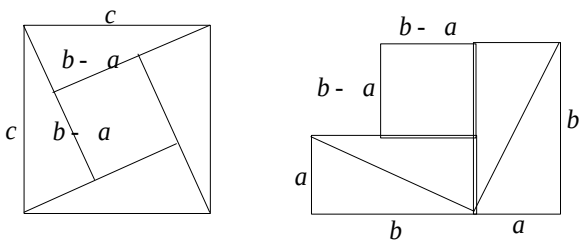
$a^2 + b^2 = c^2$, $A^2 + B^2 = C^2$을 만족하는 aC, cB, bC, cA 를 연속 변으로 갖는 순환사변형(=브라마굽타 사다리꼴)의 면적과 그의 대각선의 길이는 모두 유리수이고 두 대각선은 서로 수직으로 만난다.

☞ 브라마굽타의 정리는 프톨레마이오스의 정리가 성립한다.

교육대학원 수학교육 홍인숙

3. 바스카라의 분해증명법에 의한 피타고라스의 정리 증명(1)

$$c^2 = 2ab + (b-a)^2$$
$$= a^2 + b^2$$

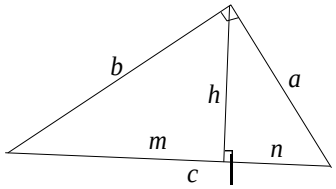


4. 바스카라의 피타고라스의 정리 증명(2)

닮은직각삼각형들로 부터

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{m},\ \frac{c}{a} = \frac{a}{n} \quad \therefore\ cm = b^2,\ cn = a^2$$

$$\therefore\ a^2 + b^2 = c(m+n) = c^2$$



7-2 아라비아의 기하학

☞ 아라비아 인들이 기하학에 기여한 중요한 역할은 어떤 발견에 있기보다는 기록의 보존에 있다

예) <원론>을 번역 등

☞ 우리가 사용하고 있는 많은 이름과 단어들의 기원은 아라비아 시대를 거슬러 올라가는 경우가 많다. 그 이유는 그리스와 인도의 많은 고전들이 아라비아 어로 번역되었기 때문이다.

예) <알마게스트>, <algebra> 등

교육대학원 수학교육 홍인숙

8. 투시화법과 연속성의 원리 : 사영기하학의 기초

8-1 연속성의 원리 : 케플러

케플러는 1609년에 행성운동의 두 법칙을 만들어 냈고, 10년 후인 1619년에 세 번째 법칙을 만들어 냈다.

첫째 : 행성은 태양을 하나의 초점으로 하는 타원궤도를 따라 태양의 둘레를 돈다.

둘째 : 행성과 태양을 잇는 동경은 같은 시간 동안 동일한 면적을 그린다.

셋째 : 행성이 자신이 궤도를 한 바퀴 도는 시간의 제곱은 궤도의 장축 반의 세제곱에 비례한다.

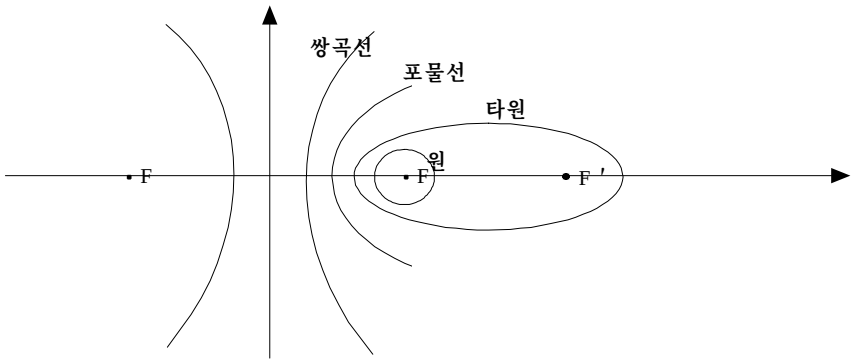
연속성의 원리

케플러는 1604년에 저서 <뷔텔로의 광학입문>에서 평면에서 일반적인 점과 직선의 성질을 대부분 가지는 어떤 이상점과 이상직선이 무한대에 존재한다는 것을 공리로 받아들이고 다음과 같이 연속성의 원리를 전개하였다.

> 직선은 무한대에서 끝나고, 두 행성은 무한대에서 만난다. 그리고 포물선은 타원 또는 쌍곡선에서 한 초점이 무한대로 접근 할 때 그 극한이다.

☞ 아폴로니우스는 원추곡선을 서로 다른 세가지 유형인 타원, 포물선, 쌍곡선으로 나누었지만, 케플러는 세가지를 동일한 원추곡선의 특수한 경우로 파악하였다.

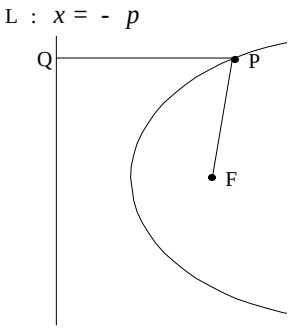
즉, 원추곡선은 하나의 직선으로부터 원까지의 다섯 가지 곡선(직선, 쌍곡선, 포물선, 타원, 원) 형태를 연속적으로 취해 나간다.



처음에는 두 초점 F와 F′이 일치한 F를 중심으로 하는 원으로부터 출발하여 초점 F′이 F로부터 차츰 멀어지면 F와 F′을 초점으로 하는 타원이 되고 마침내 F′이 무한대로 가면 그 극한은 포물선이 되고 계속 F′이 무한대를 지나서 반대방향에 나타나면 쌍곡선이 되고 마침내는 하나의 직선에 일치한다.

교육대학원 수학교육 홍인숙

1. 연속성의 원리 : 기하학적인 증명



주어진 양수 e에 대하여
평면상의 주어진 점 F $(p, 0)$까지의 거리가
직선 L : $x = -p$ 까지의 e배수 되도록 하는 점P(x, y)
의 자취의 방정식을 구하기 위하여 선분 PQ가 직선L
에 수직이 되도록 Q$(-p, y)$를 택하면

$PF = e(PQ)$

$\therefore \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x-(-p)|$

$x^2(1-e^2) - 2p(1+e^2)x + y^2 = -p^2(1-e^2)$ ----- ①

i) $e=1$이면 $y^2 = 4px$ (포물선)

ii) $e<1$이면 ①식을 $1-e^2$으로 나누어

$$x^2 - 2p\frac{1+e^2}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = -p$$

x에 관한 제곱식으로 고치면

$$(x - p\frac{1+e^2}{1-e^2})^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = p^2\{(\frac{1+e^2}{1-e^2})^2 - 1\} \text{ -------- ②}$$

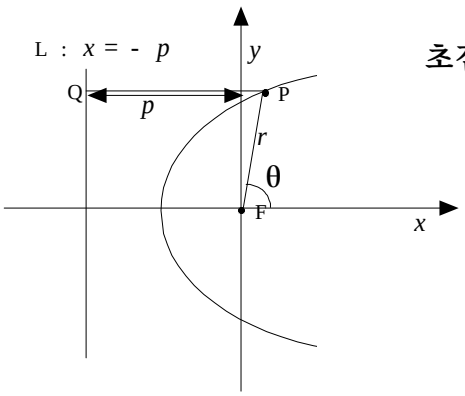
②식에서

$a^2 = p^2\{(\frac{1+e^2}{1-e^2})^2 - 1\}$, $h = p\frac{1+e^2}{1-e^2}$, $b^2 = a^2(1-e^2)$이라 두면

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (타원방정식)}$$

iii) $e>1$이면 $b^2 = -a^2(1-e^2)$ 이 되어 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$(쌍곡선)

2. 연속성의 원리 : 극방정식으로 표현



초점을 극점에 놓고 준선을 $x = -p(p>0)$이라 하자.

$|OP| = e|PQ|$

$r = e(p + r\cos\theta)$

$\therefore\ r = \frac{pe}{1 - e\cos\theta}$

준선이 $x = p$이면 $r = \frac{pe}{1 + e\cos\theta}$

$\therefore\ r = \frac{pe}{1 \pm e\cos\theta}$ ------- ③

교육대학원 수학교육 홍인숙

③을 타원으로 생각하면 꼭지점 $\theta=0$과 $\theta=\pi$에 대응되므로

주축의 길이 $2a = \frac{pe}{1-e} + \frac{pe}{1+e} = \frac{2pe}{1-e^2}$

$\therefore \quad pe = a(1-e^2)$

$\therefore \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1 \pm e\cos\theta} = \frac{pe}{1 \pm e\cos\theta}$

i) $e \to 0$ 이면 원 $r = a$에 접근

ii) $e \to 1$ 이면 $r = \frac{p}{1 \pm e\cos\theta}$로 접근 (포물선)

만일 $p=1$이라면 포물선 $r = \frac{1}{1-\cos\theta}$는

$e=0.999$인 타원 $r = \frac{0.999}{1-0.999\cos\theta}$과 비교하면

$e=0.999$를 갖는 타원은 어떤 의미에서 거의 포물선과 같다.

☞ 타원을 포물선으로 접근시키는 이러한 방법은 큰 이심률($e \approx 1$)을 갖는 타원 궤도의 혜성을 연구하는데 도움을 준다.

☞ 케플러의 이러한 발상은 연속운동의 개념이 확립되지 않았던 당시로서는 혁신적인 사상이였으며, 기하학의 방향을 크게 바꾸었을 뿐만 아니라 미적분학의 발전에 중요한 계기를 마련하였다. 특히 이 연속성의 원리는 데자르그의 사영기하학의 창시에 지대한 영향을 끼쳤다.

Note : i) $e=0 \to$ 원
ii) $e<0 \to$ 타원
iii) $e=1 \to$ 포물선
iv) $e>1 \to$ 쌍곡선

8-2 배경에 관한 정리 : 데자르그

데자르그는 1636년에 배경에 관한 소책자를 발행하였고 이것은 사영기하학의 착상에 대한 첫 암시였지만 수학자들의 관심을 끌지 못하였고 조각가 보스(Boss)가 세

상에 보급하였다.

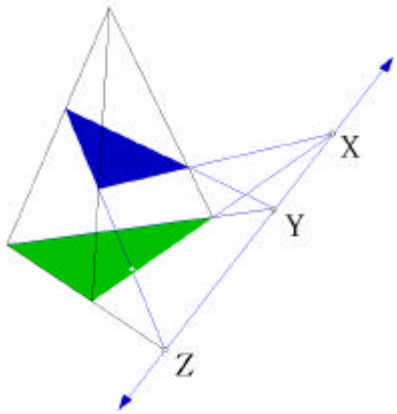
데자르그의 논문이 무시된 이유의

첫 번째는 데카르트가 소개한 새로운 해석기하학때문이었고

두 번째는 그가 소개한 약 70개의 용어가 대부분 알기 어려운 식물학에서 따온 것으로 저술되어 있었기 때문이었다.

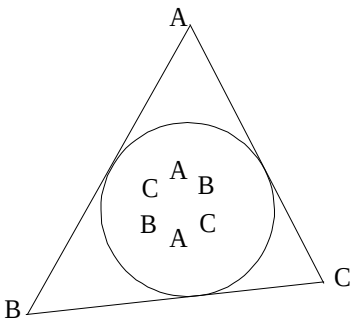
※ 배경에 관한 정리

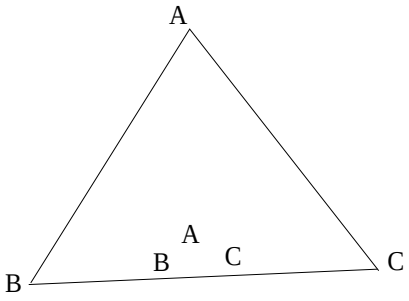
두 삼각형에 대하여 대응하는 꼭지점끼리 잇는 세 개의 직선이 한 점에서 만나면, 대응변의 세 개의 교점 X, Y, Z는 동일 직선 위에 있다.



8-3 신비의 육각형 : 파스칼

1. 파스칼은 삼각형의 종이를 접음으로써 삼각형의 내각의 합은 두 직각이 됨을 스스로 알아냈다.





2. 파스칼의 수삼각형

가. 수삼각형에 관한 도박문제

능력이 똑같은 두 도박꾼이 3점 승부(선 3승자가 우승)로 내기를 하는데, 각각 32피스톨씩의 돈을 걸었을 때 승부도중에 그만 두는 경우 각자가 차지해야 할 몫은 어떻게 되는가?

5판 3승제에서 A와 B가 승부를 한다고 하자. 그리고, A가 1승을 한 뒤 게임이 중단되었다고 한다면 A는 남은 4판 중 2판 이상을 이기면 되고, B는 3판 이상을 이기면된다.

A가 이기는 경우는 a, B가 이기는 경우는 b로 표시한다면

구분	A		B	
	이기는 경우	가지 수	이기는 경우	가지 수
4판 모두 승	aaaa	1	bbbb	1
3판 승	aaab, aaba, abaa, baaa	4	bbba, bbab, babb, abbb	4
2판 승	aabb, abba, abab bbaa, baab, baba	6		
합계		11		5

∴ A와 B는 각자 차지해야 할 몫으로 11 : 5 로 나눠야 한다.

그런데, A와 B가 이기는 경우의 수는 파스칼의 수삼각형에서

1	1	1	1	1	1	.....
1	2	3	4	5	6	.....
1	3	6	10	15	21	.....
1	4	10	20	35	56	.....
1	5	15	35	70	126	.....
·	·	·	·	·	·	.....

5번째줄의 □ 안의 수와 일치한다.

Note) A와 B가 더 이겨야 하는 횟수를 각각 m, n이라 할 때,
A가 이기는 방법의 가지수는 파스칼의 수삼각형의 (m+n)번째 줄에서 첫 번째 숫자부터 n개의 숫자의 합 s 가지이고
B가 이기는 방법의 가지수는 (n+1)번째 숫자부터 m개의 숫자의 합 t가지
∴ A와 B의 상금의 배분은 s : t 이다.

나. 수삼각형과 이항계수

수삼각형에서 대각선을 따라서 나타낸 수들은

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \, x^{n-k} y^k \quad (x, y \neq 0,\ n=0, 1, 2....)$$

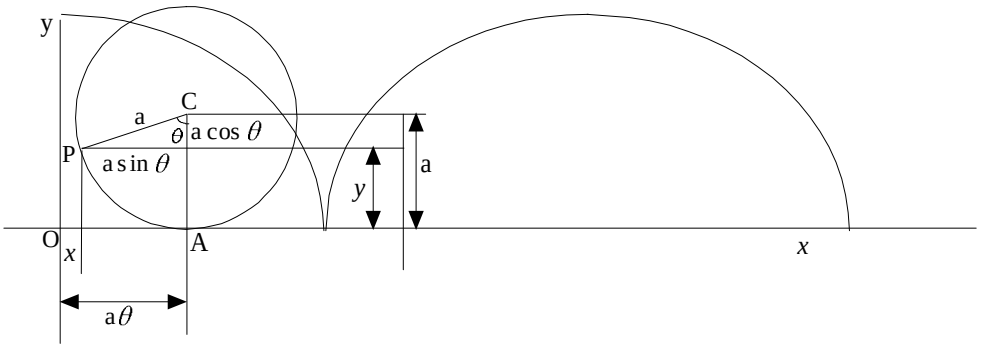
의 이항전개에서 연속된 계수 ${}_nC_k$를 나타내고 있다.

3. 파스칼의 사이클로이드 곡선

사이클로이드 곡선이란

한 원이 한 직선에 접하여 회전할 때, 그 원주위의 고정된 한 점이 그리는 곡선

교육대학원 수학교육 홍인숙



원C의 반경을 a라 하고 원주 위의 고정된 점을 $P(x, y)$라 할 때,
점 P가 원점에서 출발하여 원이 x축 위를 회전한다고 하자.
반경 CP가 θ라디안 만큼 회전하였을 때, 이 원은 점 A까지 회전.

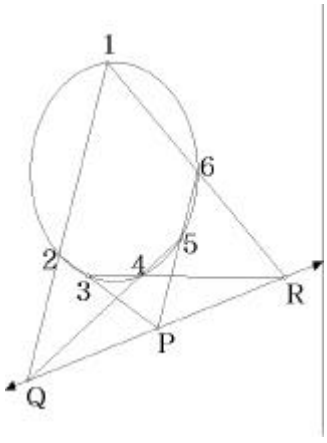
$\therefore$ OA = 호AP = $a\theta$

$\therefore$ $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$

이것이 사이클로이드 매개방정식이다.

4. 파스칼의 정리 (신비의 육각형)

원추곡선에 내접하는 육각형의 세쌍의 맞변의 세 교점은 동일 직선 위에 있다.



증명) (플뤼커의 단축표기법 사용)

원추곡선 $\phi(x, y)=0$에 대하여

$\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\alpha'=0$, $\beta'=0$, $\gamma'=0$을

직선12, 34, 56, 45, 61, 23의 방정식이라 할 때,

3차곡선 $\alpha\beta\gamma + k\,\alpha'\beta'\gamma' = 0$ 은 k값에 관계없이 9개의 점 1,2,3,4,5,6,P,Q,R을 지난다.

원추곡선위에 6개의 점과 다른 한 점을 잡고 3차곡선이 이 점을 지나도록 k 값을 정한다면 원추곡선은 3차곡선의 한 부분이 아닌 한 3차곡선과 원추곡선은 기껏해야 3×2=6개의 점에서 만날 수 있다.

따라서 다항식 θ에 대하여, $\alpha\beta\gamma + k\,\alpha'\beta'\gamma' = \phi\theta$

교육대학원 수학교육 홍인숙

좌변은 3차식, 그리고 ϕ는 2차식이므로 θ는 1차식이다.

그런데, $\alpha\beta\gamma + k\,\alpha'\beta'\gamma' = 0$은 9개의 점 1, 2, 3, 4, 5, 6, P, Q, R을 지나고

$\phi=0$은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 점을 지나므로

나머지 세 점 P,Q,R은 직선 $\theta=0$ 위에 있다.

☞ 파스칼의 정리는

1. 사영기하학 전체에서 가장 응용이 풍부한 정리 중 하나로 400개 이상의 따름정리가 있다.
2. 맞변들의 교점이 놓여 있는 직선을 내접육각형의 파스칼 선이라고 한다.

교육대학원 수학교육 홍인숙

9. 수학의 대수적인 고찰 : 해석 기하학

대수적인 고찰이란 기호법과 연산기호를 사용하여 관계논리에 바탕을 둔 수학적 관계를 다루는 추상적 고찰방식에 의해 수학을 구성하는 근대적인 수학적 고찰방법

☞ 추상적 고찰방식은 대수체계가 공리계 내의 무모순적 정의에 의해 이루어졌으며 공간, 차원, 수 등의 개념을 물리적 의미와는 관계없이 순전히 수학적 의미로 이해하는 것

☞ 이러한 대수적 고찰은 그리스 수학의 특징과는 정면으로 대립되는 것으로 그리스 수학은 거의 아무런 기호법을 사용하지 않았으며 연산기호도 거의 없었다.

즉, 그리스 수학은 직관적이며 물리적 존재에 대한 강한 집착을 나타내는데 두 선분의 곱은 면적, 세 선분의 곱은 입체에 대응시켜 3차원 공간 외에는 존재하지 않기 때문에 네 개 이상의 선분의 곱은 불가능하다는 것, 직선자와 컴퍼스만을 사용해서 작도 가능한 도형만을 기하학의 대상으로 하는 것 등은 그리스 수학이 물리적, 직관적인 고찰을 바탕으로 삼고 있음을 말해 주고 있다.

9-1 해석기하학이란 무엇인가?

해석기학학의 기본개념은 좌표를 이용하여 곡선을 방정식으로 표현하는 것으로 한마디로 **해석기하학의 진정한 본질은 기하학적 고찰을 대수적인 고찰로 바꾸는데 있다.**

9-2 기호 대수학 : 비에트

1591년에 간행하기 시작한 <해석학의 서설>에서 새로운 대수학을 전개하였는데,

☞ 여기서 처음으로 미지량을 나타낼 때에는 모음을 기지량을 나타낼 때에는 자음을 사용하는 등의 대수가 기호적으로 다루어지고 간약의 원리가 사용되었으며

☞ 3차방정식을 중심으로한 방정식의 일반적인 취급이 제시되었다.

9-3 해석기하학의 창시자 Ⅰ : 데카르트

해석기학학에 대한 데카르트의 공헌은 1637년 6월 8일에 출판된 <방법서설>의 세 번째 부록인 <기하학>에 잘 나타나 있다.

9-4 해석기하학의 창시자 Ⅱ : 페르마

1. 페르마의 미증명 문제

$2^{2^n}+1$ 꼴로 있는 모든 수는 소수이다.

☞ $n=1$ ⇒ $2^{2^1}+1=2^2+1=5$: **소수**

$n=2$ ⇒ $2^{2^2}+1=2^4+1=17$: **소수**

$n=3$ ⇒ $2^{2^3}+1=2^8+1=257$: **소수**

$n=4$ ⇒ $2^{2^4}+1=2^{16}+1=65{,}537$: **소수**

$n=5$ ⇒ $2^{2^5}+1=2^{32}+1=4{,}294{,}967{,}297$: **소수**?

페르마는 $n=5$ 일 때도 앞 수와 마찬가지로 소수라고 암시하고 있었고 지금까지 페르마의 예측이 맞다고 생각했으나, 오일러에 의해 반증되었다.

오일러에 의해 증명된 이 문제는 페르마 자신이 제시한 "페르마의 소정리"로 인해

$2^{2^5}+1=2^{32}+1=4{,}294{,}967{,}297=641\times 6{,}700{,}417$**로 소수가 아님이 증명되었다.**

2. 페르마의 소정리

p가 소수이고 a와 p가 서로 소이면 $a^{p-1}-1$은 p로 나누어 진다.

예) $p=5$**이고** $a=2$**이면** $a^{p-1}-1=15=3\times 5$

☞ 1736**년에 오일러에 의해 최초로 증명됨**

3. 페르마의 마지막정리

$n>2$일 때, $x^n+y^n=z^n$을 만족하는 양의 정수 x, y, z, n은 존재하지 않는다.

☞ 1984**년 까지 별 쓸모가 없는 순전히 호기심을 불러 일으킨 문제에 불과한 이문제는 타원함수에 대한 어떤 문제와 관계있다는 것이 밝혀졌고 그 어떤 문제는 엄청나게 다른 문제들을 풀 수 있는 출발점으로 페르마의 마직막 정리를 증명한다는 것은 곧 20세기의 수학에 한 획을 긋는 역사적인 일이었다.**

☞ **페르마가 실제로 이 문제를 증명했는지는 확실히 알 수 없고** 1908**년 괴팅겐 왕립과학원이 이 마지막정리를 증명하는 사람에게** 10**만 마르크의 상금을 걸었다**

☞ **우여곡절 끝에** 1994**년** 10**월** 6**일 와일즈는 이문제를 엄밀하게 증명하였고** 1997**년** 6**월** 27**일** 10**만 마르크의 상금을 받았다.**

교육대학원 수학교육 홍인숙

9-5 데카르트의 해석기하학

1. 기호를 발전시킴

데카르트는 비에트가 사용한 기호를 발전시켜

가. x, x^2, x^3**등을 사용하였으나**

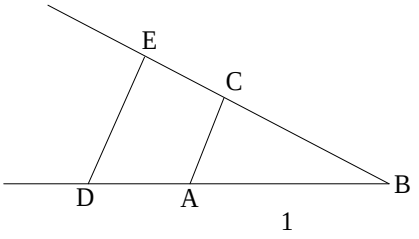
나. x^2, x^3 **등의 기호는 면적, 부피 등을 의미하지 않고** x**를 알면 쉽게 계산 될 수 있는 적당한 선분의 길이를 표시하는 것이다.**

2. 기하학에 취해진 기본원리

기하학의 문제를 대수학의 문제로 변환시키고, 그 대수적인 문제를 푼 다음에 기하학적인 문제를 풀기 위해 그 대수적인 문제를 반전 시킴

예)

AB를 단위로 하여 DB에 BC를 곱해야 한다면 점A와 C를 맺고 CA에 평행하도록 DE를 그으면 된다. BE는 곱셈의 결과이므로



△BAC ∽ △BDE

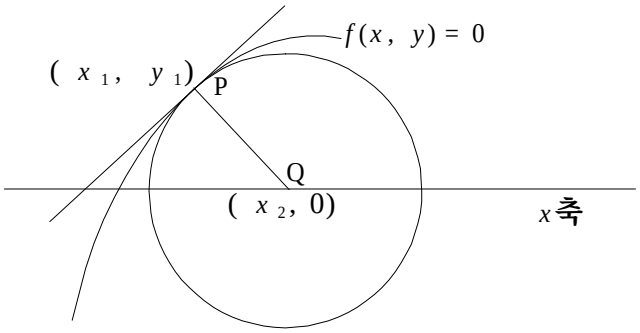
BA=1, BC= a, BD=b, BE=x **라 하면**

1 : a = b : x

∴ x=ab

여기서도, '선분×선분=면적' 이 아니라 그냥 '선분' 이다.

3. 곡선의 접선을 작도하는 방법



주어진 곡선의 방정식은 $f(x, y) = 0$**이고,** (x_1, y_1)**은 P의 좌표이고, 점 P에 접선을 긋고자 한다.**

① x**축 위의 점** $Q(x_2, 0)$**을 중심으로 하고 점P를 지나는 원의 방정식은**

$$(x - x_2)^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 \quad \text{--------} ㉠$$

② $f(x, y) = 0$**과** ㉠**을 연립하여** y**를 소거하여** x**에 대한 이차방정식을 얻는다.**

③ **접하기 때문에 주어진 곡선의 교점에 대한** x**좌표는** x_1 **하나뿐 이므로**

교육대학원 수학교육 홍인숙

판별식 D=0 으로 x_1을 갖도록 x_2를 결정한다.

④ 중심이 x_2이고 x_1까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그리면 접선을 그릴 수 있다.

예) 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선을 그려보자.

풀이) ① 주어진 점을 지나는 원의 방정식은 $(x - x_2)^2 + y^2 = (1 - x_2)^2 + 4$

② y 를 소거하면 $x^2 + 2x(2 - x_2) + (2x_2 - 5) = 0$

③ 중근을 가지려면 D=0이므로 $(2 - x_2)^2 - (2x_2 - 5) = 0$

$\therefore \quad x_2 = 3$

④ 중심이 (3, 0)이고 곡선 위의 점(1, 2)를 지나는 원을 그리고, 구하는 접선을 그리면 된다.

9-6 페르마의 해석기하학

페르마의 논문 <입문>과 데카르트의 <기하학>을 간단히 비교해 보면,
데카르트는 대부분 자취로 시작하여 그것의 방정식을 발견한 반면,
페르마는 방정식으로 시작하여 그것의 자취를 연구하였는데
이것은 해석기하학의 근본원리에 상반된 면이다.

또한, 좌표에 관해서는 좌표변환방법의 도입 등의 면에서 페르마가 데카르트보다 앞섰고 데카르트보다 훨씬 체계적이고 계몽적이다.

그러나, 페르마의 <입문>이 데카르트의 <기하학>만큼 수학에 영향을 끼치지 못한 것은 이 논문의 발간이 죽은 뒤에 나와 매우 늦었고, 또한 이 논문은 난해한 비에트의 기호로 씌어졌기 때문이다.

9-7 해석기하학의 발달 : 플뤼커

플뤼커의 단축표기법

$\alpha(x, y)=0$과 $\beta(x, y)=0$는 두 곡선이고, u와 v가 임의의 상수이거나 x, y에 관한 함수일 때, $u\alpha + v\beta=0$은 두 곡선 $\alpha(x, y)=0$과 $\beta(x, y)=0$의 교점을 지나는 곡선이다.

☞ 단축표기법은 데자르그의 배경에 관한 정리와 파스칼의 정리등을 깔끔하고 간결하게 증명할 수 있다.

교육대학원 수학교육 홍인숙

9-8 n차원 기하학

1. 점 기하학 : 기하학의 기본요소가 점인 기하학
   예) 유클리드 평면기하학, 평면 아핀기하학, 평면 사영기하학, 평면비유클리드기하학 등
2. 고차원 점 기하학을 다룬 첫 번째 논문 : 1843년 케일리의 논문
3. 1911년 서머빌이 평행이론, 기하학의 기초 그리고 기하학의 도서목록을 발간했는데 여기서 n차원의 기하학의 참고문헌이 1832개 나오고, n차원 산술공간에 적절한 개념을 집어넣어 n차원의 기하학을 해석학적으로 연구한다.

☞ n차원 산술공간이란?

실수들의 모든 n중 순서수 $(x_1, x_2, \ldots x_n)$의 집합이고, 이러한 n중 순서수를 공간에서의 점(point)라 부른다.

2, 3차원의 직교좌표에서 공식이 n차원에서 유사한 공식으로 정의된다.
다시말해,
2차원 직교좌표계의 두 점 (x_1, x_2)와 (y_1, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
3차원 직교좌표계의 두 점 (x_1, x_2, x_3)와 (y_1, y_2, y_3) 사이의 거리는

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

n차원 산술 공간에서의 두 점 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$와 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$의 거리는

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

으로 정의한다.

마찬가지로, 중심이 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$이고 반지름이 r인 n차원의 구를 다음 식을 만족하는 모든 점$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$의 집합으로 생각한다.

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = r^2$$

결국, 선분, 선분의 방향수, 두 선분 사이의 각, 점의 평행이동 등도 정의 할 수 있다.

교육대학원 수학교육 홍인숙